

## 第0章の補遺2 命題の真偽と同値性

命題  $P$  と命題  $Q$  について、 $P$  と  $Q$  とが同値である、つまり、

“ $P$  ならば  $Q$ ” が成り立ち、“ $Q$  ならば  $P$ ” も成り立つ

ということは、

$P$  が正しいとき  $Q$  も正しく、 $Q$  が正しいとき  $P$  も正しい、

つまり

$P$  が真のとき  $Q$  も真で、 $Q$  が真のとき  $P$  も真である

ということですから、

$P$  と  $Q$  との両方とも真であるか両方とも偽である

ことです。つまり、命題  $P$  と命題  $Q$  とが同値であるとは、命題  $P$  と命題  $Q$  との真偽が常に同じになることです。

命題  $A$  と  $B$  とからできる命題“ $A$  でないかまたは  $B$ ”の真偽を考えます。

$B$  が真のとき、“ $A$  でないかまたは  $B$ ”は真；

$A$  が偽のとき、“ $A$  でない”は真なので“ $A$  でないかまたは  $B$ ”は真；

$A$  が真で  $B$  が偽のとき、“ $A$  でない”は偽なので“ $A$  でないかまたは  $B$ ”は偽。

これらのことから、命題“ $A$  でないかまたは  $B$ ”の真理値表ができます。これと、命題“ $A$  ならば  $B$ ”の真理値表とを比べてみます。

$A$	$B$	$A$ でない	$A$ でないかまたは $B$	$A$ ならば $B$
真	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

この真理値表から分かるように、命題“ $A$  でないかまたは  $B$ ”の真偽と命題“ $A$  ならば  $B$ ”の真偽とは常に同じです。つまり、命題“ $A$  でないかまたは  $B$ ”と命題“ $A$  ならば  $B$ ”とは同値です。

命題  $A$  と  $B$  とに対して、命題“ $A$  ならば、 $B$ ”の真偽と、命題“ $B$  でないならば、 $A$  でない”の真偽とを考えます。真理値表は次のようになります。

$A$	$B$	$B$ でない	$A$ でない	$B$ でないならば、 $A$ でない	$A$ ならば $B$
真	真	偽	偽	真	真
真	偽	真	偽	偽	偽
偽	真	偽	真	真	真
偽	偽	真	真	真	真

このように、命題“ $A$  ならば  $B$ ”の真偽と、命題“ $B$  でないならば、 $A$  でない”の真偽とは常に同じになります。つまり、命題“ $A$  ならば  $B$ ”とその命題“ $B$  でないならば、 $A$  でない”とは同値になります。