§1.1　四則演算の法則

四則演算の基本的な法則を以下に述べます．

法則 1.1（四則演算の法則）　任意の数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

法則 1.1.1（加法の結合法則）　$a+(b+c)=(a+b)+c$；

法則 1.1.2（乗法の結合法則）　$a(bc)=(ab)c$；

法則 1.1.3（加法の交換法則）　$a+b=b+a$；

法則 1.1.4（乗法の交換法則）　$ab=ba$；

法則 1.1.5　$0+a=a+0=a$；

法則 1.1.6　$1\cdot a=a\cdot 1=a$；

法則 1.1.7　$-a+a=a+(-a)=0$；

法則 1.1.8　$a\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}\cdot a=1$　（但し $a\neq 0$）；

法則 1.1.9（分配法則）　$a(b+c)=ab+ac$，　$(a+b)c=ac+bc$．

四則演算に関するほとんどの性質はこれらの法則から証明できます．例として四則演算の性質を3つ証明します．証明の内容はよく分からなくてもかまいません．とにかく四則演算の法則から証明できるということを理解して下さい．

$\boxed{\text{例}}$　次のことを証明します：任意の数 a について $-(-a)=a$．法則 1.1.5 より

$$-(-a)=-(-a)+0\ . \tag{a}$$

法則 1.1.7 より $0=-a+a$ なので

$$-(-a)+0=-(-a)+(-a+a)\ . \tag{b}$$

法則 1.1.3 より

$$-(-a)+(-a+a)=-(-a)+\{(-a)+a\}=\{-(-a)+(-a)\}+a\ . \tag{c}$$

法則 1.1.7 より $-(-a)+(-a)=0$ なので

$$\{-(-a)+(-a)\}+a=0+a\ . \tag{d}$$

法則 1.1.5 より

$$0+a=a\ . \tag{e}$$

以上の等式 (a), (b), (c), (d), (e) より $-(-a)=a$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　次のことを証明します：任意の数 a について $0\cdot a=0$．法則 1.1.5 より

$$0\cdot a=0+0\cdot a\ . \tag{f}$$

法則 1.1.7 より $0=-a+a$，このことと法則 1.1.1 より

$$0+0\cdot a=(-a+a)+0\cdot a=-a+(a+0\cdot a)\ . \tag{g}$$

法則 1.1.6 より $a=1\cdot a$ ですから

$$-a+(a+0\cdot a)=-a+(1\cdot a+0\cdot a)\ . \tag{h}$$

法則 1.1.9 と法則 1.1.5 と法則 1.1.6 とより $1\cdot a+0\cdot a=(1+0)a=1\cdot a=a$ なので

$$-a+(1\cdot a+0\cdot a)=-a+a\ . \tag{i}$$

法則 1.1.7 より

$$-a+a=0\ . \tag{j}$$

以上の等式 (f), (g), (h), (i), (j) より $0\cdot a=0$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　次のことを証明します：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc}=\dfrac{a}{b}$．

$$\begin{aligned}
\frac{ac}{bc}&=(ac)\frac{1}{bc} \\
&=\{a(1\cdot c)\}\frac{1}{bc} && \text{（法則 1.1.6 より } c=1\cdot c \text{ なので）} \\
&=\left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} && \text{（法則 1.1.8 より } 1=\tfrac{1}{b}b \text{ なので）} \\
&=\left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc} && \text{（法則 1.1.2 より } \left(\tfrac{1}{b}b\right)c=\tfrac{1}{b}(bc) \text{ なので）} \\
&=\left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc} && \text{（法則 1.1.2 より } a\left\{\tfrac{1}{b}(bc)\right\}=\left(a\tfrac{1}{b}\right)(bc) \text{ なので）} \\
&=\left(a\frac{1}{b}\right)\left\{(bc)\frac{1}{bc}\right\} && \text{（法則 1.1.2 より } \left\{\left(a\tfrac{1}{b}\right)(bc)\right\}\cdot\tfrac{1}{bc}=\left(a\tfrac{1}{b}\right)\left\{(bc)\tfrac{1}{bc}\right\} \text{ なので）} \\
&=\left(a\frac{1}{b}\right)\cdot 1 && \text{（法則 1.1.8 より } (bc)\tfrac{1}{bc}=1 \text{ なので）} \\
&=a\frac{1}{b} && \text{（法則 1.1.6 より } \left(a\tfrac{1}{b}\right)\cdot 1=a\tfrac{1}{b} \text{ なので）} \\
&=\frac{a}{b}\ ;
\end{aligned}$$

故に $\dfrac{ac}{bc}=\dfrac{a}{b}$．　$\boxed{\text{終}}$

四則演算の法則より次の定理が成り立ちます．その証明は後回しにします．

定理 1.1.1　任意の数 a と b とについて

$$ab=0 \iff a=0 \text{ または } b=0\ .$$

定理 1.1.2　任意の数 a について，

$$a^2=0 \iff a=0\ .$$

次のことに注意して下さい：

分母が 0 の分数が表す数は無い．

この根拠を説明します．仮に分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるならば，四則演算の法則 1.1.8 のように $0\cdot\dfrac{1}{0}=1$ となります；しかし，先に証明したように任意の数 a について $0\cdot a=0$ ですから，$0\cdot\dfrac{1}{0}=0$ です；従って $0=1$ となります．このように，分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるとすると $0=1$ となり矛盾が生じます．ですから分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数はありません．従ってまた a がどんな数であっても分数 $\dfrac{a}{0}=a\cdot\dfrac{1}{0}$ が表す数はありません．

———— 定理の証明

定理 1.1.1　任意の数 a と b とについて

$$ab=0 \iff a=0 \text{ または } b=0\ .$$

証明　$a=0$ ならば $ab=0\cdot b=0$．$b=0$ ならば $ab=a\cdot 0=0$．従って，$a=0$ または $b=0$ ならば，$ab=0$．

$ab=0$ と仮定する．$a=0$ か $a\neq 0$ かのどちらかである．$a=0$ のとき，$a=0$ または $b=0$．$a\neq 0$ のときを考える．このとき，a の逆数 $\dfrac{1}{a}$ がある．$ab=0$ の両辺に $\dfrac{1}{a}$ を掛ける：

$$\frac{1}{a}ab=\frac{1}{a}0\ .$$

この等式の左辺は，$\dfrac{1}{a}a=1$ より $\dfrac{1}{a}ab=1b=b$；右辺は $\dfrac{1}{a}0=0$．よって $b=0$．故に $a=0$ または $b=0$．

このように，$a=0$ か $a\neq 0$ かのどちらかであるが，どちらのときも $a=0$ または $b=0$．よって $a=0$ または $b=0$．　（証明終り）

定理 1.1.2　任意の数 a について，

$$a^2=0 \iff a=0\ .$$

証明　任意の数 a について，定理 1.1.1 より，

$$aa=0 \iff a=0 \text{ または } a=0$$

つまり

$$a^2=0 \iff a=0\ .$$

（証明終り）