

§1.2 冪と指数法則

数 a 及び正の整数 n に対して、 a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し、 a の n 乗といいます：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}}.$$

例えば次のようになります：数 c, t, x について、

$$c^2 = c \times c, \quad t^3 = t \times t \times t, \quad x^5 = x \times x \times x \times x \times x.$$

当然、 $a^1 = a$ です。また、

$$a^n \times a = \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$ 。この等式は $n=0$ のときも成り立つことが望まれます；つまり、 $a^0 \times a = a^1 = a$ となることが望まれます。そのために数 a の 0 乗 a^0 を次のように定義します。

定義 0 以外の任意の数 a に対して $a^0 = 1$ 。

このように同じ数を何個か (0 個以上) 掛け合わせた積 (の形の式) を、**冪** (べき) (power) または累乗といいます。また、数 a の n 乗の式 a^n において、 n を**指数** (exponent) といいます。

例として数 a に対して $a^2 a^3$ を計算します：

$$a^2 a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5.$$

一般的に、数 a と自然数 m, n について、

$$a^m a^n = \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m+n) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{m+n},$$

つまり $a^m a^n = a^{m+n}$ 。

例として数 a に対して $(a^2)^3$ を計算します：

$$(a^2)^3 = (a \times a)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6.$$

一般的に、数 a と自然数 m, n について、

$$(a^m)^n = \underbrace{\overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \cdots \times \overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}}}_{m \text{ 個の } a \text{ の積が } n \text{ 個}} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{mn \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{mn},$$

つまり $(a^m)^n = a^{mn}$ 。

例として 0 以外の数 a に対して $\frac{a^5}{a^3}$ を計算します：

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2.$$

一般的に、 0 以外の数 a と自然数 m, n について、 $m \geq n$ のとき、

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個の } a \text{ の積}}} = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m-n) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{m-n},$$

つまり $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 。

以上の結果を**指数法則**といいます。

定理 (自然数指数の指数法則) 任意の数 a と任意の自然数 m, n について、

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \\ a \neq 0 \text{ で } m \geq n \text{ のとき } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

例として数 a, b に対して $(ab)^3$ を計算します：

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3.$$

一般的に、数 a, b と自然数 n について $(ab)^n = a^n b^n$ です：

$$(ab)^n = (a \times b)^n = \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}^{n \text{ 個の } a \times b \text{ の積}} \\ = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ 個の } b \text{ の積}} \\ = a^n b^n.$$

例として数 a, b ($b \neq 0$) に対して $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ を計算します：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^4}{b^4}.$$

一般的に、数 a, b ($b \neq 0$) と自然数 n について $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ です：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ 個の } \frac{a}{b} \text{ の積}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ 個の } b \text{ の積}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

このようにして次の定理が導かれます。この定理も指数法則と呼ばれます。

定理 (自然数指数の指数法則) 任意の数 a, b と任意の自然数 n について、

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad b \neq 0 \text{ のとき } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

例題 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする。次の式を計算して簡単にする：

$$2a^3 b (3ab^3)^2, \quad 6x^5 y \left(\frac{y^2}{3x}\right)^2.$$

$$2a^3 b (3ab^3)^2 = 2a^3 b \cdot 3^2 a^2 (b^3)^2 = 2a^3 b \cdot 9a^2 b^6 = 18a^{3+2} b^{1+6} \\ = 18a^5 b^7.$$

$$6x^5 y \left(\frac{y^2}{3x}\right)^2 = 6x^5 y \frac{(y^2)^2}{(3x)^2} = 6x^5 y \frac{y^{2 \cdot 2}}{3^2 x^2} = 6x^5 y \frac{y^4}{9x^2} = \frac{6}{9} x^{5-2} y^{1+4} \\ = \frac{2}{3} x^3 y^5. \quad \square$$

問題 1.2 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとしします。以下の式を計算して簡単にしなさい。

$$(1) 3ab^2(2a^2b)^3.$$

$$(2) \frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y}\right)^3.$$

$$(3) \frac{(3c^2d)^3}{6c^4d}.$$