§1.4　有理数と実数

有理数 (rational number) とは分母分子が整数である分数で表される数のことです. 例えば次のような数は有理数です：

$$\frac{25}{3}\ ,\qquad 7=\frac{7}{1}\ ,\qquad -\frac{31}{4}=\frac{-31}{4}\ ,\qquad -5=\frac{-5}{1}\ .$$

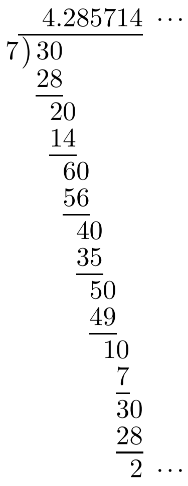
正確にいうと，有理数とは，ある整数 m および 0 以外のある整数 n について $r=\dfrac{m}{n}$ となる数 r のことです.

有理数と有理数との和・差・積・商（0 で割る商は除く）はいつも有理数です. つまり，有理数の範囲では四則演算が自由にできます. そして1.1節で述べた四則演算の法則が成り立ちます.

例えば分数 $\dfrac{15}{4}$ や $\dfrac{8}{3}$ は次のように小数で表されます：

$$\frac{15}{4}=3.75\ ,\qquad \frac{8}{3}=2.666666\cdots\ ;$$

また例えば，右のように実際に割算することで，$\dfrac{30}{7}$ を表す小数を何桁でも計算できます；この意味で $\dfrac{30}{7}$ は小数で表されます.



$$\frac{30}{7}=4.285714285714\cdots\ .$$

このように考えると，分母分子が整数である分数（但し分母は 0 でない）は小数で表されます（分子が分母で割り切れるときは小数点以下0桁の小数で表されると考えます）. 有理数は分母分子が整数である分数で表されますから，有理数は小数で表せることになります. しかし，逆に，小数で表されるからといって有理数であるとは限りません. 例えば円周率

$$\pi=3.14159265358979462643\cdots$$

は有理数ではありません[2]. また例えば小数

$$0.123456789101112131415161718192021\cdots$$

で表される数も有理数ではありません. そこでこのような有理数でない数まで含めて，小数で表される数[3]（負の小数を含む）を**実数** (real number) といいます. 実数の全体を $\mathbf{R}$ と書き表します：

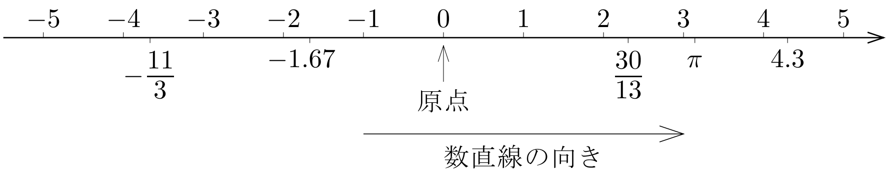
$$\mathbf{R}=\{\,x \mid x\ \text{は実数}\,\}\ .$$

実数と実数との和・差・積・商（0 で割る商は除く）はいつも実数です. つまり，実数の範囲では四則演算が自由にできます. そして1.1節で述べた四則演算の法則が成り立ちます.

有理数でない実数を無理数といいます. 例えば円周率 π は，有理数ではない実数ですから，無理数です.

$$\text{実数}\left\{\begin{array}{l}\text{有理数}\\ \text{有理数でない実数} = \text{無理数}\end{array}\right.\ .$$

実数は例えば次のように1本の直線の上に目盛ることができます.



このように実数が目盛られた直線を数直線といいます. 数直線の各点と各実数とは，過不足とか重複とか無しに対応させることができます. 数直線において実数 0 に対応する点を**原点**といいます. また，数直線において実数が大きくなっていく向きをその数直線の**向き**といいます. 更に，数直線において，各実数 x に対応する点を座標 x の点といいます.

---

[2] 円周率 π は有理数でないことが証明されますが，その証明は高度に過ぎるので本書では扱いません.

[3] “小数で表される”という記述は厳密ではありません. 実数とは何かを厳密に述べることは高度に過ぎるので本書では扱いません.