§1.5 実数の大小関係

実数には大小関係があります. 0.2節で述べたように，実数の大小関係を不等号を用いて表します.

例えば，実数 x が 7 以下ということは，x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということです：

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 \ .$$

法則 1.5.1　任意の実数 a と b とについて

$$a \leq b \iff a < b \text{ または } a = b \ .$$

この法則より，実数 a と b とについて，$a < b$ と $a = b$ とのどちらかでも成り立てば $a \leq b$ です. 例えば，$2 < 3$ なので $2 \leq 3$ であり，$5 = 5$ なので $5 \leq 5$ です.

定理 1.5.1　任意の実数 a と b とについて，

$$a < b \text{ ならば } a \leq b \ , \qquad a = b \text{ ならば } a \leq b \ .$$

例えば，実数 x が 7 より小さくないということは，x は 7 以上ということです：

$$x \not< 7 \iff x \geq 7 \ .$$

法則 1.5.2　任意の実数 a と b とについて，

$$a \not< b \iff a \geq b \ .$$
$$a \not\leq b \iff a > b \ .$$

例えば，実数 x は 7 より小さいかまたは 7 以上です：$x < 7$ または $x \geq 7$.

定理 1.5.2　任意の実数 a と b とについて，$a < b$ または $a \geq b$.

証明　$a < b$ または $a \not< b$，法則 1.5.2 より $a \not< b$ ならば $a \geq b$，従って $a < b$ または $a \geq b$.　（証明終り）

例えば，実数 x が 7 より小さいならば x は 7 と等しくありません：$x < 7$ ならば $x \neq 7$.

定理 1.5.3　任意の実数 a と b とについて，$a < b$ ならば $a \neq b$.

証明　定理 1.5.1 より　$a = b$　ならば　$a \geq b$　；法則 1.5.2 より　$a \geq b$　ならば　$a \not< b$.　従って，$a = b$ ならば $a \not< b$.　対偶をとると，$a < b$ ならば $a \neq b$.　（証明終り）

例えば，実数 x について，$x \leq 7$ かつ $x \geq 7$ ならば，$x = 7$ です.

定理 1.5.4　任意の実数 a と b とについて，$a \leq b$ かつ $a \geq b$ ならば，$a = b$.

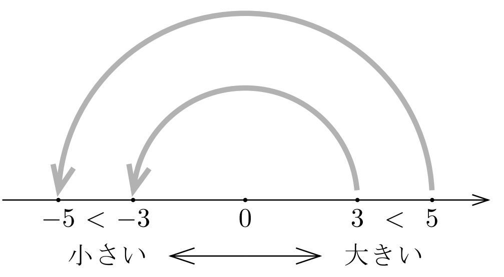
証明　$a \leq b$ かつ $a \geq b$ と仮定する.　$a \leq b$ なので，法則 1.5.1 より $a < b$ または $a = b$.　$a \geq b$ なので，法則 1.5.2 より $a \not< b$.　このように，$a < b$ または $a = b$ で，$a \not< b$ なので，$a = b$.　（証明終り）

不等号が表す大小関係と加法・乗法とについて，次の法則が基本になります.

法則 1.5.3　任意の実数 a, b, c について，

$$a < b \text{ ならば } a + c < b + c \ ,$$
$$a < b \text{ かつ } c > 0 \quad \text{ならば} \quad ac < bc \ .$$

3 と 5 とを比べると $3 < 5$ ですが，-3 と -5 とを比べると $-3 > -5$ です. このように，不等式の両辺の符号（正か負かということ）が反対になると大小関係も反対になります.



定理 1.5.5　任意の実数 a, b について，

$$a < b \text{ ならば } -a > -b \ , \qquad a \leq b \text{ ならば } -a \geq -b \ .$$

証明　実数 a, b について $a < b$ とする. 法則 1.5.3 より

$$a + (-a - b) < b + (-a - b) \ ,$$

この不等式の左辺は $a + (-a - b) = -b$ で右辺は $b + (-a - b) = -a$ なので，

$$-b < -a \ ,$$

つまり $-a > -b$.　（証明終り）

定理 1.5.6　任意の実数 a, b, c について，

$$a < b \text{ かつ } c < 0 \quad \text{ならば} \quad ac > bc \ .$$

証明　実数 a, b, c について $a < b$ かつ $c < 0$ とする.　$c < 0$ なので，定理 1.5.5 より $-c > -0$ つまり $-c > 0$.　従って，$a > b$ かつ $-c > 0$ なので，法則 1.5.3 より $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$ つまり $-ac < -bc$.　定理 1.5.5 より $-(-ac) > -(-bc)$ つまり $ac > bc$.　（証明終り）

等号付きの不等号についても同様のことが成り立ちます（証明は省略します）.

定理 1.5.7　任意の実数 a, b, c について，

$$a \leq b \text{ ならば } a + c \leq b + c \ ;$$
$$a \leq b \text{ かつ } c \geq 0 \quad \text{ならば} \quad ac \leq bc \ ;$$
$$a \leq b \text{ かつ } c \leq 0 \quad \text{ならば} \quad ac \geq bc \ .$$

定理 1.5.8　任意の実数 a と b とについて，

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ ,$$
$$a > 0 \text{ かつ } b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab < 0 \ ,$$
$$a < 0 \text{ かつ } b > 0 \quad \text{ならば} \quad ab < 0 \ ,$$
$$a < 0 \text{ かつ } b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ .$$

証明　一部のみ証明する. 他の部分も同様に証明できる.

法則 1.5.3 より

$$0 < a \text{ かつ } b > 0 \quad \text{ならば} \quad 0b < ab \ ,$$

つまり

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ .$$

定理 1.5.6 より

$$a < 0 \text{ かつ } b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0b \ ,$$

つまり

$$a < 0 \text{ かつ } b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ .$$

（証明終り）

等号付きの不等号についても同様のことが成り立ちます（証明は省略します）.

定理 1.5.9　任意の実数 a と b とについて，

$$a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \geq 0 \ ,$$
$$a \geq 0 \text{ かつ } b \leq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \leq 0 \ ,$$
$$a \leq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \leq 0 \ ,$$
$$a \leq 0 \text{ かつ } b \leq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \geq 0 \ .$$

定理 1.5.10　任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

証明　定理 1.5.9 より，

$$a \geq 0 \text{ かつ } a \geq 0 \quad \text{ならば} \quad aa \geq 0 \ ,$$

つまり，$a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$.　また，定理 1.5.8 より，

$$a < 0 \text{ かつ } a < 0 \quad \text{ならば} \quad aa > 0 \ ,$$

つまり，$a < 0$ ならば $a^2 > 0$.　定理 1.5.1 より　$a^2 > 0$　ならば　$a^2 \geq 0$　なので，$a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$.

こうして次のことが成り立つ：$a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$，$a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$.　定理 1.5.2 より $a \geq 0$ または $a < 0$ ；$a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $a^2 \geq 0$ なので，いずれにせよ $a^2 \geq 0$.　（証明終り）

定理 1.5.11　任意の実数 a について，

$$a > 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} > 0 \ , \qquad a < 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} < 0 \ .$$

証明　“ $a > 0$ ならば $\frac{1}{a} > 0$ ” を証明する.

$a > 0$ と仮定する.　定理 1.5.1 より $a \geq 0$.　仮に $\frac{1}{a} \leq 0$ とすると，定理 1.5.9 より $a \cdot \frac{1}{a} \leq 0$ つまり $1 \leq 0$ ；これは矛盾である.　よって $\frac{1}{a} \not\leq 0$，法則 1.5.2 より $\frac{1}{a} > 0$.　（証明終り）