

§1.5 実数の大小関係

実数には大小関係があります. 0.2節で述べたように, 実数の大小関係を不等号を用いて表します.

例えば, 実数 x が 7 以下ということは, x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということです:

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 .$$

法則 1.5.1 任意の実数 a と b について

$$a \leq b \iff a < b \text{ または } a = b .$$

この法則より, 実数 a と b について, $a < b$ と $a = b$ とのどちらかでも成り立てば $a \leq b$ です. 例えば, $2 < 3$ なので $2 \leq 3$ であり, $5 = 5$ なので $5 \leq 5$ です.

定理 1.5.1 任意の実数 a と b について,

$$a < b \text{ ならば } a \leq b , \quad a = b \text{ ならば } a \leq b .$$

例えば, 実数 x が 7 より小さくないということは, x は 7 以上ということです:

$$x \not< 7 \iff x \geq 7 .$$

法則 1.5.2 任意の実数 a と b について,

$$a \not< b \iff a \geq b .$$

$$a \not\leq b \iff a > b .$$

例えば, 実数 x は 7 より小さいかまたは 7 以上です: $x < 7$ または $x \geq 7$.

定理 1.5.2 任意の実数 a と b について, $a < b$ または $a \geq b$.

証明 $a < b$ または $a \not< b$, 法則 1.5.2 より $a \not< b$ ならば $a \geq b$, 従って $a < b$ または $a \geq b$. (証明終り)

例えば, 実数 x が 7 より小さいならば x は 7 と等しくありません: $x < 7$ ならば $x \neq 7$.

定理 1.5.3 任意の実数 a と b について, $a < b$ ならば $a \neq b$.

証明 定理 1.5.1 より $a = b$ ならば $a \geq b$; 法則 1.5.2 より $a \geq b$ ならば $a \not< b$. 従って, $a = b$ ならば $a \not< b$. 対偶をとると, $a < b$ ならば $a \neq b$. (証明終り)

例えば, 実数 x について, $x \leq 7$ かつ $x \geq 7$ ならば, $x = 7$ です.

定理 1.5.4 任意の実数 a と b について, $a \leq b$ かつ $a \geq b$ ならば, $a = b$.

証明 $a \leq b$ かつ $a \geq b$ と仮定する. $a \leq b$ なので, 法則 1.5.1 より $a < b$ または $a = b$. $a \geq b$ なので, 法則 1.5.2 より $a \not< b$. このように, $a < b$ または $a = b$ で, $a \not< b$ なので, $a = b$. (証明終り)

不等号が表す大小関係と加法・乗法とについて, 次の法則が基本になります.

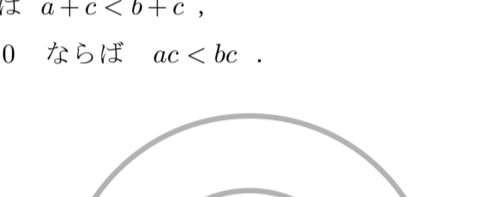
法則 1.5.3 任意の実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ ならば } a + c < b + c ,$$

$$a < b \text{ かつ } c > 0 \text{ ならば } ac < bc .$$

3 と 5 とを比べると $3 < 5$ ですが, -3 と -5 とを比べると $-3 > -5$ です. このよう

に, 不等式の両辺の符号 (正か負かということ) が反対になると大小関係も反対になります.



定理 1.5.5 任意の実数 a, b について,

$$a < b \text{ ならば } -a > -b , \quad a \leq b \text{ ならば } -a \geq -b .$$

証明 実数 a, b について $a < b$ とする. 法則 1.5.3 より

$$a + (-a - b) < b + (-a - b) ,$$

この不等式の左辺は $a + (-a - b) = -b$ で右辺は $b + (-a - b) = -a$ なので,

$$-b < -a ,$$

つまり $-a > -b$. (証明終り)

定理 1.5.6 任意の実数 a, b, c について,

$$a < b \text{ かつ } c < 0 \text{ ならば } ac > bc .$$

証明 実数 a, b, c について $a < b$ かつ $c < 0$ とする. $c < 0$ なので, 定理 1.5.5 より $-c > -0$ つまり $-c > 0$. 従って, $a > b$ かつ $-c > 0$ なので, 法則 1.5.3 より $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$ つまり $-ac < -bc$. 定理 1.5.5 より $-(-ac) > -(-bc)$ つまり $ac > bc$. (証明終り)

等号付きの不等号についても同様のことが成り立ちます (証明は省略します).

定理 1.5.7 任意の実数 a, b, c について,

$$a \leq b \text{ ならば } a + c \leq b + c ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \geq 0 \text{ ならば } ac \leq bc ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \leq 0 \text{ ならば } ac \geq bc .$$

定理 1.5.8 任意の実数 a と b について,

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0 \text{ ならば } ab > 0 ,$$

$$a > 0 \text{ かつ } b < 0 \text{ ならば } ab < 0 ,$$

$$a < 0 \text{ かつ } b > 0 \text{ ならば } ab < 0 ,$$

$$a < 0 \text{ かつ } b < 0 \text{ ならば } ab > 0 .$$

証明 一部のみ証明する. 他の部分も同様に証明できる.

法則 1.5.3 より

$$0 < a \text{ かつ } b > 0 \text{ ならば } 0b < ab ,$$

つまり

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0 \text{ ならば } ab > 0 .$$

定理 1.5.6 より

$$a < 0 \text{ かつ } b < 0 \text{ ならば } ab > 0b ,$$

つまり

$$a < 0 \text{ かつ } b < 0 \text{ ならば } ab > 0 .$$

(証明終り)

等号付きの不等号についても同様のことが成り立ちます (証明は省略します).

定理 1.5.9 任意の実数 a と b について,

$$a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば } ab \geq 0 ,$$

$$a \geq 0 \text{ かつ } b \leq 0 \text{ ならば } ab \leq 0 ,$$

$$a \leq 0 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば } ab \leq 0 ,$$

$$a \leq 0 \text{ かつ } b \leq 0 \text{ ならば } ab \geq 0 .$$

定理 1.5.10 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

証明 定理 1.5.9 より,

$$a \geq 0 \text{ かつ } a \geq 0 \text{ ならば } aa \geq 0 ,$$

つまり, $a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$. また, 定理 1.5.8 より,

$$a < 0 \text{ かつ } a < 0 \text{ ならば } aa > 0 ,$$

つまり, $a < 0$ ならば $a^2 > 0$. 定理 1.5.1 より $a^2 > 0$ ならば $a^2 \geq 0$ なので, $a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$.

こうして次のことが成り立つ: $a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$, $a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$. 定理 1.5.2 より $a \geq 0$ または $a < 0$; $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $a^2 \geq 0$ なので, いずれにせよ $a^2 \geq 0$. (証明終り)

定理 1.5.11 任意の実数 a について,

$$a > 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} > 0 , \quad a < 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} < 0 .$$

証明 “ $a > 0$ ならば $\frac{1}{a} > 0$ ” を証明する.

$a > 0$ と仮定する. 定理 1.5.1 より $a \geq 0$. 仮に $\frac{1}{a} \leq 0$ とすると, 定理 1.5.9 より $a \cdot \frac{1}{a} \leq 0$ つまり $1 \leq 0$; これは矛盾である. よって $\frac{1}{a} \not\leq 0$, 法則 1.5.2 より $\frac{1}{a} > 0$. (証明終り)