§1.6　根号

数 a に対して，$x^2 = a$ となる数 x を a の**平方根**といいます．つまり数 a の平方根とは2乗すると a になる数のことです．例えば，$3^2 = 9$，$(-3)^2 = 9$ なので，3 と -3 とは 9 の平方根です．一般に，任意の数 x について，定理1.3より $(-x)^2 = x^2$ ですから，x が a の平方根ならば $-x$ も a の平方根です．

平方根の存在に関して次の定理が成り立ちます．その証明は省きます．

定理1.6.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

定義　0 以上の任意の実数 a に対して，2乗すると a になる 0 以上の実数を $\sqrt{a}$ と書き表す．

つまり，0 以上の実数 a に対して $\sqrt{a}$ は a の 0 以上の平方根です．例えば，9 の平方根には 3 と -3 とがありますが，$\sqrt{9}$ はそれらのうち 0 以上の方を表します：$\sqrt{9} = 3$．

記号 $\sqrt{}$ を根号といいます．$\left(\sqrt{A}\right)^2$ を $\sqrt{A}^{\,2}$ のように略します．

例えば，$\sqrt{3}$ は2乗すると 3 になる実数なので，$\sqrt{3}^{\,2} = 3$．また，$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$．一般的に次の定理が成り立ちます．

定理1.6.2　$a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt{a}^{\,2} = a\ ,\qquad \sqrt{a^2} = a\ .$$

証明　根号の定義より $\sqrt{a}$ は2乗すると a になる数なので，$\sqrt{a}^{\,2} = a$．

根号の定義より，$\sqrt{a^2}$ は2乗すると a^2 になる 0 以上の実数である．a は2乗すると a^2 になり 0 以上の実数である．定理1.6.1より, 2乗すると a^2 になる 0 以上の実数は一つしかない．従って $\sqrt{a^2} = a$ [4]．（証明終り）

$0 = 0^2$，$1 = 1^2$ ですから，定理1.6.2より，

$$\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0\ ,\qquad \sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1\ .$$

例えば負の実数 $a = -3$ について，$-a = 3$ なので，

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -a\ .$$

このように次の定理が成り立ちます．

定理1.6.3　$a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$．

証明　実数 a について $a \leq 0$ とする．定理1.5.5より $-a \geq 0$．定理1.3より $a^2 = (-a)^2$ なので，$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2}$，$-a \geq 0$ なので定理1.6.2より $\sqrt{(-a)^2} = -a$，故に $\sqrt{a^2} = -a$．（証明終り）

例えば $\sqrt{9+4^2}$ と $\sqrt{9+4}^{\,2}$ との違いに注意して下さい：

$$\sqrt{9+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\ ,$$
$$\sqrt{9+4}^{\,2} = \sqrt{13}^{\,2} = 13\ .$$

定理1.6.4　$a > 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a} > 0$．

証明　$a > 0$ なので定理1.5.3より $a \neq 0$．仮に $\sqrt{a} = 0$ とすると，$\sqrt{a}^{\,2} = 0$，定理1.6.2より $\sqrt{a}^{\,2} = a$ なので $a = 0$．ところが $a \neq 0$ なので，$\sqrt{a} \neq 0$．

根号の定義より $\sqrt{a} \geq 0$ なので，定理1.5.1より，$\sqrt{a} > 0$ または $\sqrt{a} = 0$；$\sqrt{a} \neq 0$ なので $\sqrt{a} > 0$．（証明終り）

定理1.6.5　$a \geq 0$，$b \geq 0$ である任意の実数 a と b とについて，

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}\ ,\qquad b > 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\ .$$

証明　$a \geq 0$，$b \geq 0$ なので，定理1.6.2より $\sqrt{a}^{\,2} = a$，$\sqrt{b}^{\,2} = b$．

指数法則を用いると

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^{\,2}\cdot\sqrt{b}^{\,2} = a\cdot b = ab\ ,$$

よって $ab = \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$．従って

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2}\ .$$

$\sqrt{a} \geq 0$，$\sqrt{b} \geq 0$ より $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ なので，定理1.6.2より

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}\sqrt{b}\ .$$

故に $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$．

$b > 0$ とする．定理1.6.4より $\sqrt{b} > 0$．定理1.5.11より $\dfrac{1}{\sqrt{b}} > 0$．指数法則を用いると

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^{\,2}}{\sqrt{b}^{\,2}} = \frac{a}{b}\ ,$$

よって $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 0$．従って

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2}\ .$$

$\sqrt{a} \geq 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{b}} > 0$ より $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a}\dfrac{1}{\sqrt{b}} \geq 0$ なので，定理1.6.2より

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ ,$$

故に $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$．（証明終り）

定理1.6.5を用いると例えば次のような計算ができます：

$$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}\ ,\qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{6}{24}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\ .$$

実数 a と b とについて，$a \geq 0$，$b \geq 0$ のとき，$\sqrt{a^2} = a$ なので

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = a\sqrt{b}\ .$$

例えば，

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2\cdot 2} = \sqrt{7^2}\sqrt{2} = 7\sqrt{2}\ .$$

また，$a \geq 0$ である実数 a について，指数法則及び $\sqrt{a}^{\,2} = a$ より

$$\sqrt{a}^{\,3} = \sqrt{a}^{\,2+1} = \sqrt{a}^{\,2}\sqrt{a}^{\,1} = a\sqrt{a}\ .$$

例題　次の式を計算して簡単にする：$\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} + \sqrt{15}\sqrt{5}$．

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} + \sqrt{15}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{21}{7}} + \sqrt{5^2\cdot 3} = \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ .$$

終

問題 1.6.1　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $\sqrt{7}\sqrt{21} + \dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$．　　(2) $\sqrt{6}\sqrt{15} - \dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{3}}$．

例題　次の式を計算して簡単にする：$\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2$．

乗法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を用いる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{2}^{\,2}} = \frac{\sqrt{3}^{\,2} + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{5}^{\,2}}{2}\\ &= \frac{3 + 2\sqrt{15} + 5}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}\\ &= 4 + \sqrt{15}\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.6.2　次の式を計算して簡単にしなさい：$\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$．

例題　次の式を計算して簡単にする：$\left(4+\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)$．

分配法則を用いる．

$$\begin{aligned}\left(4+\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right) &= 4\left(5-2\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\left(5-2\sqrt{3}\right)\\ &= 20 - 8\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}^{\,2} = 20 - 3\sqrt{3} - 2\cdot 3\\ &= 14 - 3\sqrt{3}\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.6.3　次の式を計算して簡単にしなさい：$\left(4-\sqrt{5}\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)$．

例題　次の式を計算して簡単にする：$\left(\sqrt{5}-2\right)^3$．

乗法公式 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ を用いる．指数法則を用いると $\sqrt{5}^{\,3} = \sqrt{5}^{\,2}\sqrt{5}^{\,1} = 5\sqrt{5}$．

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-2\right)^3 &= \sqrt{5}^{\,3} - 3\sqrt{5}^{\,2}2 + 3\sqrt{5}\,2^2 - 2^3 = 5\sqrt{5} - 30 + 12\sqrt{5} - 8\\ &= 17\sqrt{5} - 38\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.6.4　次の式を計算して簡単にしなさい：$\left(4-\sqrt{7}\right)^3$．

分数の分母に根号 $\sqrt{}$ が現れるとき，分母分子に適当な数（式）を掛けて分母に根号が現れないように変形することを分母の有理化といいます．そのために公式 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AC}{BC}$ および定理1.6.2をよく用います．例えば，

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}^{\,2}} = \frac{3}{7}\sqrt{7}\ .$$

一般的に述べると，実数 a と c とについて，$a > 0$ のとき

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}^{\,2}} = \frac{c\sqrt{a}}{a}\ .$$

例題　次の分数の式について分母有理化して簡単にする：$\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$．

まず分子の根号の中の自然数と分母の根号の中の自然数とで約分する．

$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{35}{15}} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}\ .$$

終

問題 1.6.5　次の分数の式について分母を有理化して簡単にしなさい：$\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{35}}$．

例題　次の分数の式について分母有理化して簡単にする：$\dfrac{6-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$．

分母を分けて計算する．

$$\frac{6-\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}^{\,2}} - \sqrt{\frac{48}{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \sqrt{16} = 2\sqrt{3} - 4\ .$$

終

問題 1.6.6　次の分数の式について分母を有理化して簡単にしなさい：$\dfrac{\sqrt{96}-4\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$．

実数 a と b とについて $a \geq 0$，$b \geq 0$ とします．乗法公式 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ を用いると，

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{a}^{\,2} - \sqrt{b}^{\,2} = a - b\ .$$

この等式を用いると次のような分母の有理化ができます：$a \neq b$ のとき，

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\ ,$$
$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\ .$$

例題　次の分数の式について分母を有理化して簡単にする：$\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$．

分母と分子とに $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ を掛ける．

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)} = \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}^{\,2}-\sqrt{5}^{\,2}}\\ &= \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2-5} = \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{-3} = -2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\\ &= 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.6.7　以下の分数の式の分母を有理化して簡単にしなさい．

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$．　　(2) $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$．

例題　次の分数の式について分母を有理化して簡単にする：$\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$．

分母と分子とに $4+\sqrt{3}$ を掛ける．

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} &= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)} = \frac{8+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-\sqrt{3}^{\,2}}{4^2-\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{8-2\sqrt{3}-3}{16-3}\\ &= \frac{5-2\sqrt{3}}{13}\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.6.8　以下の分数の式の分母を有理化して簡単にしなさい．

(1) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$．　　(2) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$．

——— 平方根の存在

0以上の実数に対してその平方根で0以上の実数があることの証明を省きました．例として正の 2 の平方根になる実数があることを説明します．次のようにして正の 2 の平方根を表す小数を計算していきます．

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$

$1.1^2 = 1.21$
$1.2^2 = 1.44$
$1.3^2 = 1.69$
$1.4^2 = 1.96$
$1.5^2 = 2.25$

$1.41^2 = 1.9881$
$1.42^2 = 2.0164$

$1.411^2 = 1.990921$
$1.412^2 = 1.993744$
$1.413^2 = 1.996569$
$1.414^2 = 1.999396$
$1.415^2 = 2.002225$

$1.4141^2 = 1.99967881$
$1.4142^2 = 1.99996164$
$1.4143^2 = 2.00024449$

$1.41421^2 = 1.9999899241$
$1.41422^2 = 2.0000182084$

$1.414211^2 = 1.999992752521$
$1.414212^2 = 1.999995580944$
$1.414213^2 = 1.999998409369$
$1.414214^2 = 2.000001237796$

$1.4142131^2 = 1.99999869221161$
$1.4142132^2 = 1.99999897505424$
$1.4142133^2 = 1.99999925789689$
$1.4142134^2 = 1.99999954073956$
$1.4142135^2 = 1.99999982358225$
$1.4142136^2 = 2.00000010642496$

このような方法で正の 2 の平方根を表す小数は何桁でも計算できます．1.4節で述べたように，小数で表せる数は実数でした．従って正の 2 の平方根になる実数があります．

[4] この部分は次のような論法です：“2乗すると a になる 0 以上の実数”ということを 〜〜 と略記すると，(1) $\sqrt{a^2}$ は 〜〜 である；(2) a は 〜〜 である；(3) 〜〜 は一つしかない；(4) 従って $\sqrt{a^2} = a$ である．