§1.7　絶対値

任意の実数 a に対して，定理 1.5.10 より $a^2 \geq 0$ ですから，根号の定義より実数 $\sqrt{a^2}$ が存在します；これを a の**絶対値** (absolute value) といいます.

定義　任意の実数 a に対して，$\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい，$|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2}\ .$$

例えば，

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3\ , \qquad |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5\ , \qquad \left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{\sqrt{7}^{\,2}} = \sqrt{7}\ .$$

$A \geq 0$ である実数 A について $\sqrt{A} \geq 0$ ですから，絶対値は必ず 0 以上です：

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } |a| \geq 0\ .$$

実数 a について $a \geq 0$ のとき，定理 1.6.2 より $\sqrt{a}^{\,2} = a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^{\,2} = a\ .$$

実数 a について $a < 0$ のとき，定理 1.6.3 より $\sqrt{a}^{\,2} = -a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^{\,2} = -a\ .$$

定理 1.7.1　任意の実数 a について

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\ a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (\ a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}\ .$$

定理 1.7.2　任意の実数 a について，$|a| = 0$ ならば $a = 0$.

証明　$|a| = 0$ とすると，$\sqrt{a^2} = 0$ ，$\sqrt{a^2}^{\,2} = 0$ ，$a^2 \geq 0$ なので定理 1.6.2 より $\sqrt{a^2}^{\,2} = a^2$ ，従って $a^2 = 0$ なので $a = 0$.　（証明終り）

定理 1.7.3　任意の実数 a と b とについて，

$$|a|\,|b| = |ab|\ , \qquad b \neq 0 \text{ のとき } \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|\ .$$

証明　絶対値の定義と定理 1.6.5 とより

$$|a|\,|b| = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2b^2}\ ,$$

絶対値の定義と指数法則とより

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2}\ ,$$

従って $|a|\,|b| = |ab|$.

$b \neq 0$ とする．定理 1.7.2 より $|b| \neq 0$ ．絶対値の定義と定理 1.6.5 とより

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\ ,$$

絶対値の定義と指数法則とより，

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\ ,$$

従って $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$.　（証明終り）

絶対値について更に以下の定理が成り立ちます.

定理 1.7.4　任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$.

証明　$a^2 \geq 0$ なので定理 1.6.2 より $\sqrt{a^2}^{\,2} = a^2$ ，従って

$$|a|^2 = \sqrt{a^2}^{\,2} = a^2\ .$$

（証明終り）

定理 1.7.5　任意の実数 a について $|-a| = |a|$.

証明　定理 1.3 より $(-a)^2 = a^2$ なので，

$$|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|\ .$$

（証明終り）

定理 1.7.6　数直線上の任意の実数 a と b とについて，a と b との間の距離は $|a-b|$.

証明　定理 1.5.2 より，$a \geq b$ または $a < b$ ．$a \geq b$ のとき，a と b との間の距離は $a-b$，$a-b \geq 0$ なので定理 1.7.1 より $|a-b| = a-b$ ，よって a と b との間の距離は $|a-b|$ ．$a < b$ のとき，a と b との間の距離は $b-a$，$a-b < 0$ なので定理 1.7.1 より $|a-b| = -(a-b) = b-a$ ，よって a と b との間の距離は $|a-b|$ ．故にどちらのときも a と b との間の距離は $|a-b|$.　（証明終り）