

§ 1.7 絶対値

任意の実数 a に対して、定理 1.5.10 より $a^2 \geq 0$ ですから、根号の定義より実数 $\sqrt{a^2}$ が存在します；これを a の**絶対値** (absolute value) といいます。

定義 任意の実数 a に対して、 $\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい、 $|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2} .$$

例えば、

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3, \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |\sqrt{7}| = \sqrt{\sqrt{7}^2} = \sqrt{7} .$$

$A \geq 0$ である実数 A について $\sqrt{A} \geq 0$ ですから、絶対値は必ず 0 以上です：

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } |a| \geq 0 .$$

実数 a について $a \geq 0$ のとき、定理 1.6.2 より $\sqrt{a^2} = a$ なので、

$$|a| = \sqrt{a^2} = a .$$

実数 a について $a < 0$ のとき、定理 1.6.3 より $\sqrt{a^2} = -a$ なので、

$$|a| = \sqrt{a^2} = -a .$$

定理 1.7.1 任意の実数 a について

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定理 1.7.2 任意の実数 a について、 $|a| = 0$ ならば $a = 0$.

証明 $|a| = 0$ とすると、 $\sqrt{a^2} = 0$ 、 $\sqrt{a^2}^2 = 0$ 、 $a^2 \geq 0$ なので定理 1.6.2 より $\sqrt{a^2}^2 = a^2$ 、従って $a^2 = 0$ なので $a = 0$. (証明終り)

定理 1.7.3 任意の実数 a と b について、

$$|a||b| = |ab|, \quad b \neq 0 \text{ のとき } \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right| .$$

証明 絶対値の定義と定理 1.6.5 とより

$$|a||b| = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2b^2} ,$$

絶対値の定義と指数法則とより

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} ,$$

従って $|a||b| = |ab|$.

$b \neq 0$ とする。定理 1.7.2 より $|b| \neq 0$. 絶対値の定義と定理 1.6.5 とより

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} ,$$

絶対値の定義と指数法則とより、

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} ,$$

従って $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$. (証明終り)

絶対値について更に以下の定理が成り立ちます。

定理 1.7.4 任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$.

証明 $a^2 \geq 0$ なので定理 1.6.2 より $\sqrt{a^2}^2 = a^2$ 、従って

$$|a|^2 = \sqrt{a^2}^2 = a^2 .$$

(証明終り)

定理 1.7.5 任意の実数 a について $|-a| = |a|$.

証明 定理 1.3 より $(-a)^2 = a^2$ なので、

$$|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| .$$

(証明終り)

定理 1.7.6 数直線上の任意の実数 a と b について、 a と b との間の距離は $|a-b|$.

証明 定理 1.5.2 より、 $a \geq b$ または $a < b$. $a \geq b$ のとき、 a と b との間の距離は $a-b$ 、 $a-b \geq 0$ なので定理 1.7.1 より $|a-b| = a-b$ 、よって a と b との間の距離は $|a-b|$. $a < b$ のとき、 a と b との間の距離は $b-a$ 、 $a-b < 0$ なので定理 1.7.1 より $|a-b| = -(a-b) = b-a$ 、よって a と b との間の距離は $|a-b|$. 故にどちらのときも a と b との間の距離は $|a-b|$. (証明終り)