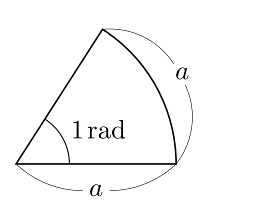
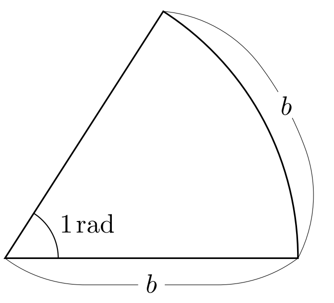
§10.1　弧度法





　これまで，角度の単位として，直角が 90 度（ 90° ）になるような単位の“度”（ ° ）を用いていきました．この“度”で角の大きさを測る方法を度数法といいます．ところがこの度数法は数学的な議論には不便です．そこで，数学的に便利な“**弧度** (radian)”という新しい単位を考えます．この“弧度”で角の大きさを測る方法を弧度法といいます．“弧度”を“rad”と書き表します．

　半径との弧の長さが等しい扇形には，いろいろな大きさのものがありますが，それらは総て相似です．従って，半径との弧の長さが等しい扇形の中心角の大きさは唯一つに決まります．

定義　半径との弧の長さが等しい扇形の中心角の大きさを 1rad とする．

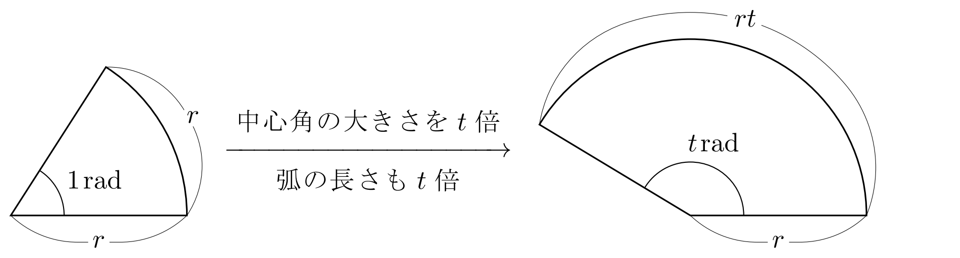
　rad の定義より，扇形の中心角の大きさが 1rad であるとき，その扇形の半径との弧の長さとは同じですから，

　　半径が r で中心角の大きさが 1rad である扇形の弧の長さは r

です．扇形の中心角の大きさが t 倍になれば弧の長さも t 倍になります．従って，

　　半径が r で中心角の大きさが $t$rad である扇形の弧の長さは rt

です．



定理 10.1.1　扇形の半径が r で中心角の大きさが $t$rad で弧の長さが l であるとき $l = rt$ ．

$\boxed{例}$　半径が 2 で中心角の大きさが $\frac{5}{3}$rad である扇形の弧の長さは $2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ です．$\boxed{終}$

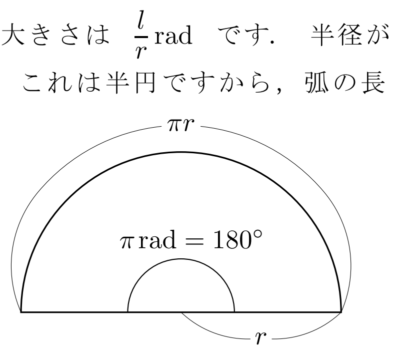
$\boxed{問題 10.1.1}$　半径が 4 で中心角の大きさが $\frac{7}{6}$rad である扇形の弧の長さを求めなさい．

　扇形の半径が r で中心角の大きさが $t$rad で弧の長さが l であるとき，$l = rt$ なので $t = \frac{l}{r}$ です．

$\boxed{例}$　半径が 5 で弧の長さが 7 の扇形の中心角の大きさを $t$rad とおくと，$7 = 5t$ なので $t = \frac{7}{5}$ ．半径が 5 で弧の長さが 7 の扇形の中心角の大きさは $\frac{7}{5}$rad です．$\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.1.2}$　半径が 6 で弧の長さが 8 である扇形の中心角の大きさを弧度法で求めなさい．

　弧度法と度数法とによる角度の対応をみます．先に述べたように，半径が r （ $r > 0$ ）で弧の長さが l である扇形の中心角の大きさは $\frac{l}{r}$rad です．半径が r で中心角の大きさが 180° の扇形を考えます．これは半円ですから，弧の長さ l は半径 r の円周の長さ $2\pi r$ の半分です：$l = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$ ．従ってその中心角の角度は弧度法で $\frac{l}{r}\mathrm{rad} = \frac{\pi r}{r}\mathrm{rad} = \pi\mathrm{rad}$ です．中心角の大きさは 180° ですから，$\pi\mathrm{rad} = 180°$ です．



$$\pi\mathrm{rad} = 180° \ .$$

この公式 $\pi\mathrm{rad} = 180°$ の両辺を π で割ると

$$1\mathrm{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \fallingdotseq \left(\frac{180}{3.14}\right)^{\circ} \fallingdotseq 57.3° \ .$$

また，公式 $180° = \pi\mathrm{rad}$ の両辺を 180 で割ると

$$1° = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} \ .$$

これらの式から，弧度法と度数法との対応は次の表のようになります．

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度法	0rad	$\frac{\pi}{6}$rad	$\frac{\pi}{4}$rad	$\frac{\pi}{3}$rad	$\frac{\pi}{2}$rad	$\frac{2\pi}{3}$rad	$\frac{3\pi}{4}$rad	$\frac{5\pi}{6}$rad	πrad	$\frac{3\pi}{2}$rad	2πrad

$\boxed{例題}$　度数法による一般角 75° , −200° , 780° を弧度法で表す．

　公式 $180° = \pi\mathrm{rad}$ を用いるために，$\square \times 180°$ の形に変形する．

$$75° = \frac{75}{180} \times 180° = \frac{5}{12} \times \pi\mathrm{rad} = \frac{5\pi}{12}\mathrm{rad} \ .$$

$$-200° = -\frac{200}{180} \times 180° = -\frac{10}{9} \times \pi\mathrm{rad} = -\frac{10\pi}{9}\mathrm{rad} \ .$$

$$780° = \frac{780}{180} \times 180° = \frac{13}{3} \times \pi\mathrm{rad} = \frac{13\pi}{3}\mathrm{rad} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.1.3}$　度数法による一般角 72° , −320° , 840° を弧度法で表しなさい．

$\boxed{例題}$　弧度法による一般角 $\frac{2\pi}{3}$rad , $-\frac{11\pi}{8}$rad , $\frac{8}{3}$rad を度数法で表す．

　公式 $\pi\mathrm{rad} = 180°$ を用いる．

$$\frac{2\pi}{3}\mathrm{rad} = \frac{2}{3} \times \pi\mathrm{rad} = \frac{2}{3} \times 180° = 120° \ .$$

$$-\frac{11\pi}{8}\mathrm{rad} = -\frac{11}{8} \times \pi\mathrm{rad} = -\frac{11}{8} \times 180° = -\left(\frac{495}{2}\right)^{\circ} \ .$$

$$\frac{8}{3}\mathrm{rad} = \frac{8}{3\pi} \times \pi\mathrm{rad} = \frac{8}{3\pi} \times 180° = \left(\frac{480}{\pi}\right)^{\circ} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.1.4}$　弧度法による一般角 $\frac{7\pi}{6}$rad , $-\frac{19\pi}{14}$rad , $\frac{7}{2}$rad を度数法で表しなさい．

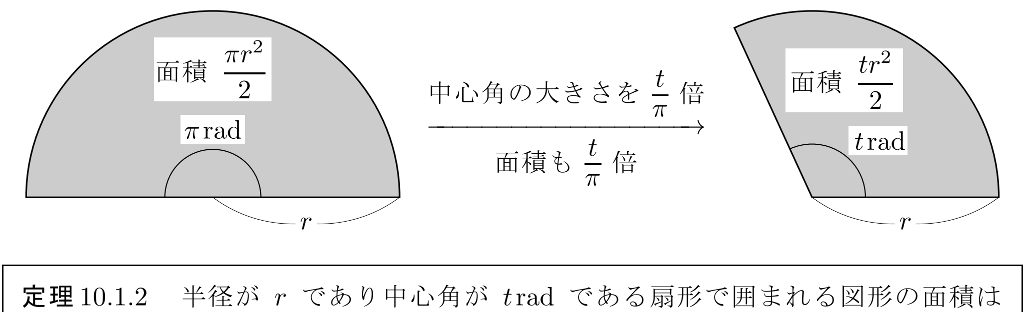
　扇形で囲まれる図形の面積を求めます．半径 r の半円で囲まれる図形の面積は $\frac{\pi r^2}{2}$ です．半円は中心角の角度が $180° = \pi\mathrm{rad}$ の扇形ですから，

　　半径が r で中心角が πrad である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{\pi}{2}r^2$

です．中心角が $\frac{t}{\pi}$ 倍になると面積も $\frac{t}{\pi}$ 倍になりますから，

　　半径が r で中心角が $\frac{t}{\pi}\pi$rad である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{t}{\pi}\frac{\pi}{2}r^2$

です．つまり，半径が r で中心角が $t$rad である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}r^2t$ です．



定理 10.1.2　半径が r であり中心角が $t$rad である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}r^2t$ である．

$\boxed{例}$　半径が 5 で中心角が 3rad である扇形で囲まれる図形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 5^2 \times 3 = \frac{75}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.1.5}$　半径が 3 で中心角が $\frac{8\pi}{7}$rad である扇形で囲まれる図形の面積を求めなさい．