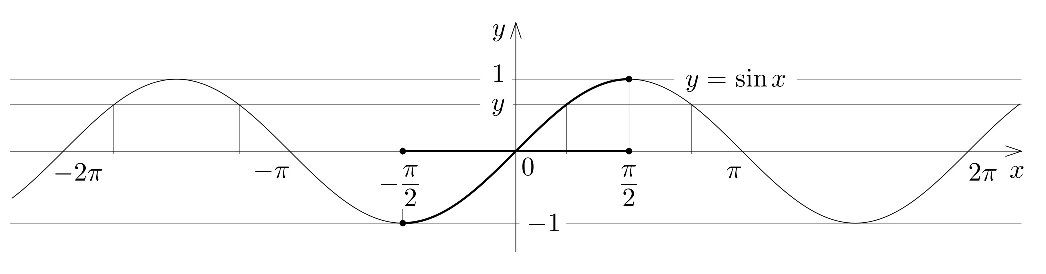
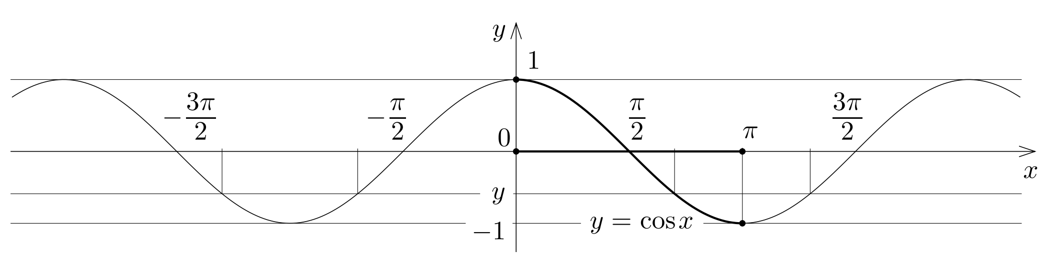
§10.10　逆三角関数

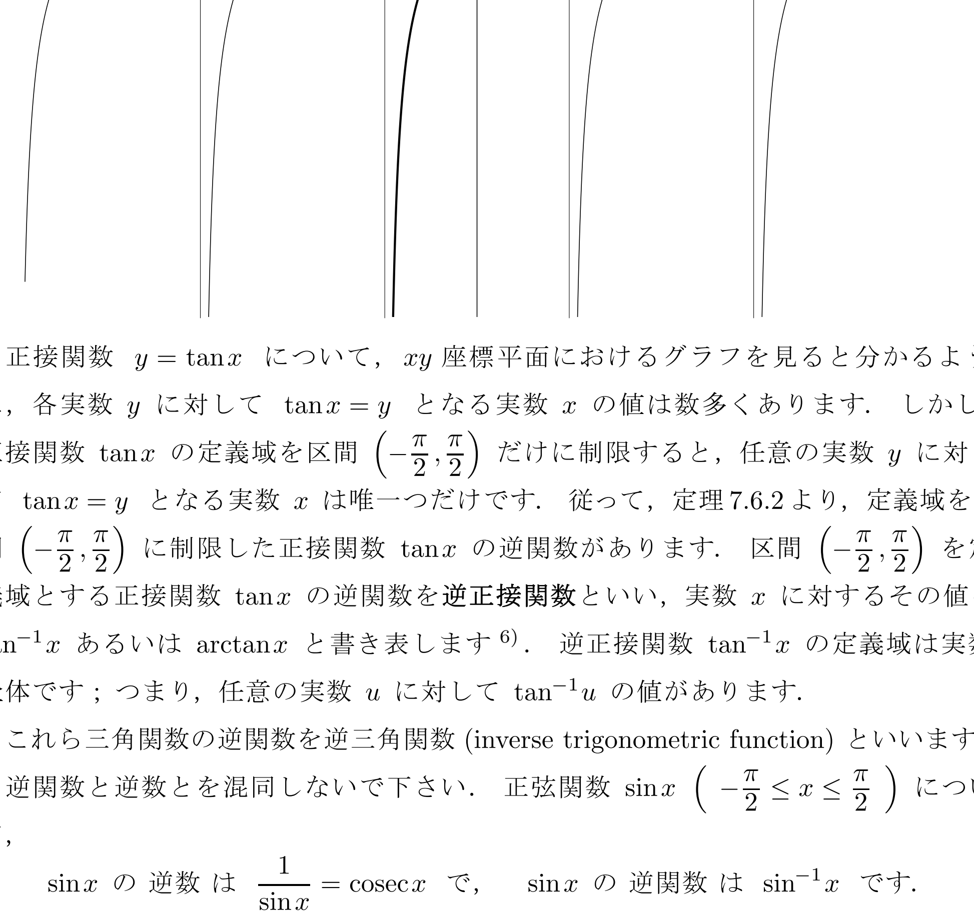
正弦関数, 余弦関数, 正接関数の逆関数を考えます． 定理 7.6.2 を思い起こして下さい：関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つだけならば，f の逆関数がある．



正弦関数 $y=\sin x$ について，xy 座標平面におけるグラフを見ると分かるように，$-1\leq y\leq 1$ となる実数 y に対して $\sin x=y$ となる実数 x の値は数多くあります．ですから，このままでは正弦関数 $\sin x$ の逆関数があるとはいえません． しかし，x の値を $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ となる範囲に限れば， $\sin x=y$ となる実数 x の値は唯一つだけです． つまり，正弦関数 $\sin x$ の定義域を区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ に制限すると，区間 $[-1,1]$ の各実数 y に対して $\sin x=y$ となる実数 x は唯一つだけです． 従って，定理 7.6.2 より，定義域を区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ に制限した正弦関数 $\sin x$ の逆関数があります． 区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の逆関数を**逆正弦関数** (inverse sine function) といい，実数 x に対するその値を $\sin^{-1}x$ あるいは $\arcsin x$ と書き表します[4]． 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は $[-1,1]$ です；つまり， $-1\leq x\leq 1$ である実数 x に限り $\sin^{-1}x$ の値があります．



余関数 $y=\cos x$ について，xy 座標平面におけるグラフを見ると分かるように，$-1\leq y\leq 1$ となる実数 y に対して $\cos x=y$ となる実数 x の値は数多くあります．しかし，x の値を $0\leq x\leq\pi$ となる範囲に限ると，区間 $[-1,1]$ の各実数 y に対して $\cos x=y$ となる実数 x は唯一つだけです． 従って，定理 7.6.2 より，定義域を区間 $[0,\pi]$ に制限した余弦関数 $\cos x$ の逆関数があります． 区間 $[0,\pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の逆関数を**逆余弦関数** (inverse cosine function) といい，実数 x に対するその値を $\cos^{-1}x$ あるいは $\arccos x$ と書き表します[5]． 逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は $[-1,1]$ です；つまり， $-1\leq x\leq 1$ である実数 x に限り $\cos^{-1}x$ の値があります．



正接関数 $y=\tan x$ について，xy 座標平面におけるグラフを見ると分かるように，各実数 y に対して $\tan x=y$ となる実数 x の値は数多くあります． しかし，正接関数 $\tan x$ の定義域を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ だけに制限すると，任意の実数 y に対して $\tan x=y$ となる実数 x は唯一つだけです． 従って，定理 7.6.2 より，定義域を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ に制限した正接関数 $\tan x$ の逆関数があります． 区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の逆関数を**逆正接関数**といい，実数 x に対するその値を $\tan^{-1}x$ あるいは $\arctan x$ と書き表します[6]． 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は実数全体です；つまり，任意の実数 u に対して $\tan^{-1}u$ の値があります．

これら三角関数の逆関数を逆三角関数 (inverse trigonometric function) といいます．

逆関数と逆数とを混同しないで下さい． 正弦関数 $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ について，

$$\sin x \text{ の 逆数 は } \frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec}x \text{ で，}\qquad \sin x \text{ の 逆関数 は } \sin^{-1}x \text{ です．}$$

$\sin^{-1}x$ と $(\sin x)^{-1}=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec}x$ とは違います．

一般に，関数 f の逆関数の値域は元の関数 f の定義域でした（定理 7.6.5）． 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の逆関数ですから，その値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ です． 逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ は区間 $[0,\pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の逆関数ですから，その値域は $[0,\pi]$ です． 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の逆関数ですから，その値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ です．

> 実数 x について，
>
> $\sin^{-1}x$ の値がある条件は $-1\leq x\leq 1$ で，このとき $-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}x\leq\frac{\pi}{2}$ ；
>
> $\cos^{-1}x$ の値がある条件は $-1\leq x\leq 1$ で，このとき $0\leq\cos^{-1}x\leq\pi$ ；
>
> x がどんな実数でも $\tan^{-1}x$ の値があって $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ ．

定理 7.6.1 を思いおこして下さい：関数 g が関数 f の逆関数であるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } u \text{ について } g\bigl(f(u)\bigr)=u\ ,$$
$$g \text{ の定義域の任意の要素 } v \text{ について } f\bigl(g(v)\bigr)=v\ .$$

このことを逆三角関数に適用します． 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ （$-1\leq x\leq 1$）は正弦関数 $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数ですから，

$$-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \sin^{-1}(\sin u)=u\ ,$$
$$-1\leq v\leq 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \sin(\sin^{-1}v)=v\ .$$

逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ （$-1\leq x\leq 1$）は余弦関数 $\cos x$ （$0\leq x\leq\pi$）の逆関数ですから，

$$0\leq u\leq\pi \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \cos^{-1}(\cos u)=u\ ,$$
$$-1\leq v\leq 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \cos(\cos^{-1}v)=v\ .$$

逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は正接関数 $\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数ですから，

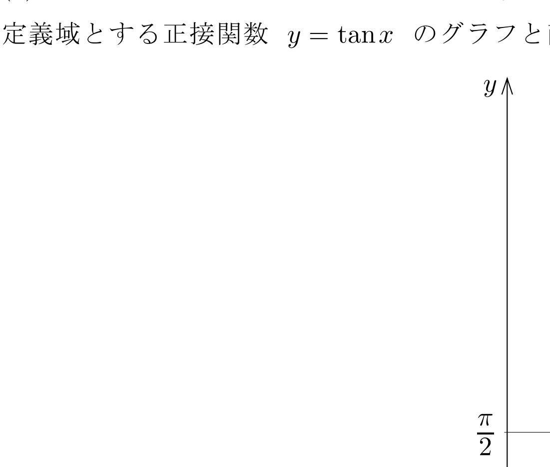
$$-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \tan^{-1}(\tan u)=u\ ,$$
$$\text{任意の実数 } v \text{ について } \tan(\tan^{-1}v)=v\ .$$

> **定理 10.10.1**　三角関数と逆三角関数について以下のことが成り立つ．
>
> $$-\frac{\pi}{2}\leq u\leq\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \sin^{-1}(\sin u)=u\ .$$
> $$0\leq u\leq\pi \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \cos^{-1}(\cos u)=u\ .$$
> $$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \tan^{-1}(\tan u)=u\ .$$
>
> 更に以下のことが成り立つ．
>
> $$-1\leq v\leq 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \sin(\sin^{-1}v)=v\ .$$
> $$-1\leq v\leq 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \cos(\cos^{-1}v)=v\ .$$
> $$\text{任意の実数 } v \text{ について } \tan(\tan^{-1}v)=v\ .$$

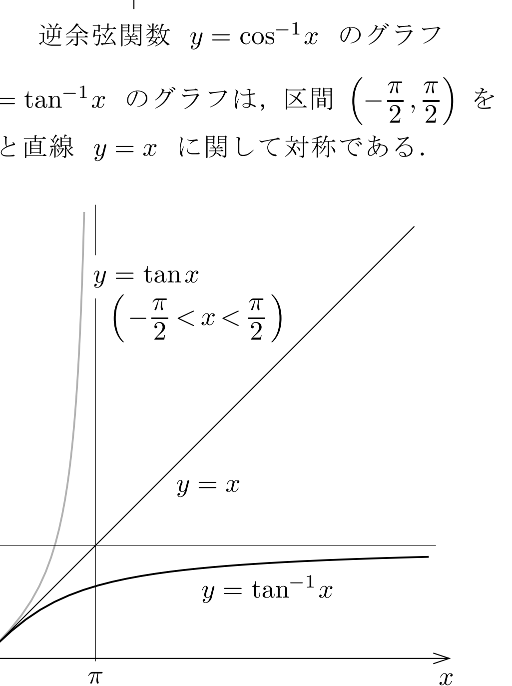
xy 座標平面において関数 f の逆関数のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理 7.7）． この定理を三角関数・逆三角関数に適用すると以下のことが成り立ちます．

(1)　区間 $[-1,1]$ を定義域とする逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフは，区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $y=\sin x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

(2)　区間 $[-1,1]$ を定義域とする逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフは，区間 $[0,\pi]$ を定義域とする余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

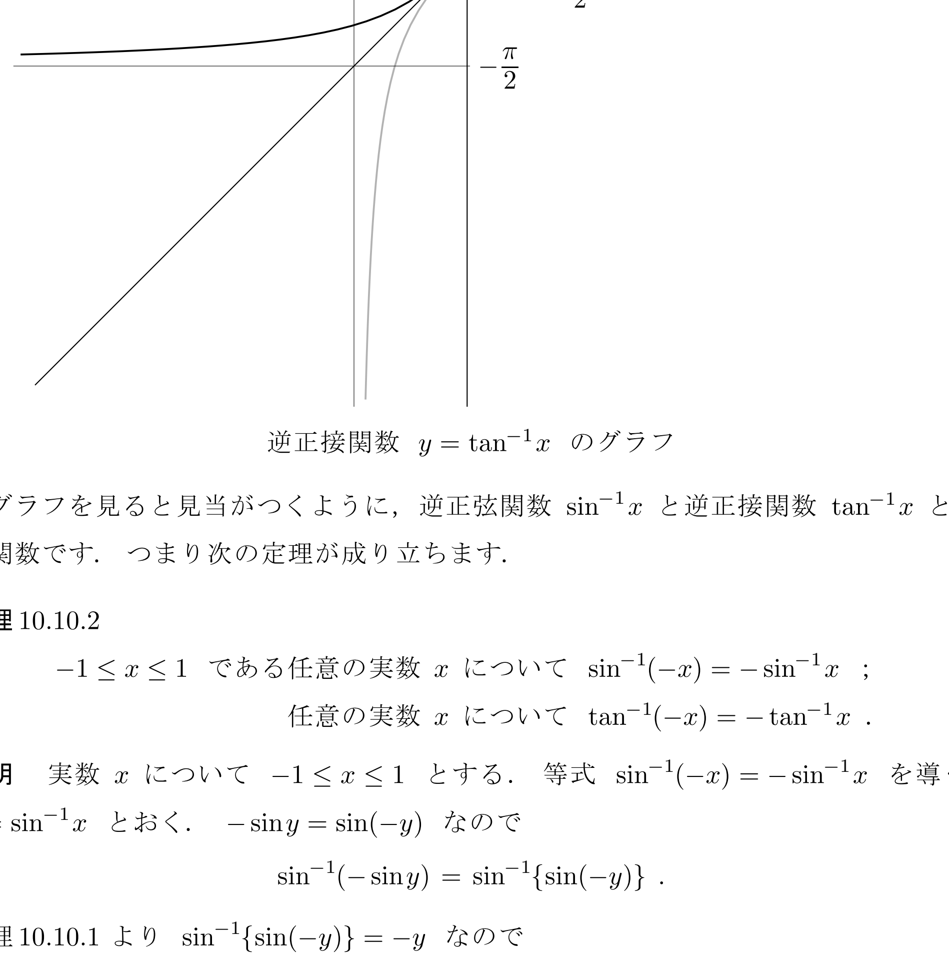


逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフ



逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフ

(3)　実数全体を定義域とする逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフは，区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $y=\tan x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．



逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフ

グラフを見ると見当がつくように，逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ と逆正接関数 $\tan^{-1}x$ とは奇関数です． つまり次の定理が成り立ちます．

定理 10.10.2

$$-1\leq x\leq 1 \text{ である任意の実数 } x \text{ について } \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x\ ;$$
$$\text{任意の実数 } x \text{ について } \tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x\ .$$

証明　実数 x について $-1\leq x\leq 1$ とする． 等式 $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ を導く． $y=\sin^{-1}x$ とおく． $-\sin y=\sin(-y)$ なので

$$\sin^{-1}(-\sin y)\ =\ \sin^{-1}\{\sin(-y)\}\ .$$

定理 10.10.1 より $\sin^{-1}\{\sin(-y)\}=-y$ なので

$$\sin^{-1}(-\sin y)\ =\ -y\ .$$

$y=\sin^{-1}x$ なので

$$\sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1}x)\}\ =\ -\sin^{-1}x\ .$$

定理 10.10.1 より $\sin(\sin^{-1}x)=x$ なので， $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ ．

任意の実数 x について $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ となることも同様に証明できる．

（証明終り）

因みに，逆余弦関数については次のようになります： $-1\leq x\leq 1$ である任意の実数 x について $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ ．

例題　以下の値を求める： $\sin^{-1}\frac{1}{2}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\tan^{-1}\sqrt{3}$, $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ ．

定理 10.10.1 と定理 10.10.2 とを用いる．

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ なので，

$$\sin^{-1}\frac{1}{2}\ =\ \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\ =\ \frac{\pi}{6}\ ,\qquad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\ =\ -\sin^{-1}\frac{1}{2}\ =\ -\frac{\pi}{6}\ .$$

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ なので，

$$\tan^{-1}\sqrt{3}=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\ ,\qquad \tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\tan^{-1}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}\ .$$

終

問題 10.10.1　以下の逆三角関数の値を求めなさい．

(1) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(2) $\sin^{-1}0$.　(3) $\sin^{-1}(-1)$.

(4) $\tan^{-1}1$.　(5) $\tan^{-1}0$.　(6) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

例題　次の式を計算する： $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ ．

〔解説〕 $x=\cos^{-1}\frac{3}{4}$ とおく． $\sin x$ を計算する．

$$\cos x\ =\ \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ \frac{3}{4}\ .$$

従って，

$$\sin^2x\ =\ 1-\cos^2x\ =\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\ =\ \frac{7}{16}\ .$$

$0\leq\cos^{-1}\frac{3}{4}\leq\pi$ なので $0\leq x\leq\pi$ なので $\sin x\geq 0$ ． よって

$$\sin x\ =\ \sqrt{\frac{7}{16}}\ =\ \frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

故に， $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)=\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ．　終

問題 10.10.2　次の式を計算しなさい： $\cos\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ．

例題　次の式を計算する： $\cos(\tan^{-1}3)$ ．

〔解説〕 $x=\tan^{-1}3$ とおく． $\cos x$ を計算する．

$$\tan x\ =\ \tan(\tan^{-1}3)\ =\ 3\ .$$

従って， $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ より，

$$\cos^2x\ =\ \frac{1}{1+\tan^2x}\ =\ \frac{1}{1+3^2}\ =\ \frac{1}{10}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}3<\frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ なので $\cos x>0$ ． よって

$$\cos x\ =\ \sqrt{\frac{1}{10}}\ =\ \frac{1}{\sqrt{10}}\ .$$

故に， $\cos(\tan^{-1}3)=\cos x=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ．　終

問題 10.10.3　次の式を計算しなさい： $\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$ ．

例題　次の式を計算する： $\sin^{-1}(\sin 6)$ ．

〔解説〕 実数 a について $-\frac{\pi}{2}\leq a\leq\frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a)=a$ ． この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する． 正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π なので， $\sin 6=\sin(6-2\pi)$ ． $2\pi\fallingdotseq 6.28$ なので， $6-2\pi\fallingdotseq 6-6.28=-0.28$ ， よって $-\frac{\pi}{2}\leq 6-2\pi\leq\frac{\pi}{2}$ なので，

$$\sin^{-1}(\sin 6)=\sin^{-1}\{\sin(6-2\pi)\}=6-2\pi\ .$$

終

問題 10.10.4　次の式を計算しなさい： $\sin^{-1}\{\sin(-7)\}$ ．

問題 10.10.5　次の式を計算しなさい： $\sin^{-1}(\sin 13)$ ．

例題　次の式を計算する： $\tan^{-1}(\tan 4)$ ．

〔解説〕 実数 a について $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a)=a$ ． この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する． 正接関数 $\tan x$ の基本周期は π なので， $\tan 4=\tan(4-\pi)$ ． $\pi\fallingdotseq 3.14$ なので， $4-\pi\fallingdotseq 4-3.14=0.86$ ， よって $-\frac{\pi}{2}\leq 4-\pi\leq\frac{\pi}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan 4)=\tan^{-1}\{\tan(4-\pi)\}=4-\pi\ .$$

終

問題 10.10.6　次の式を計算しなさい： $\tan^{-1}\{\tan(-3)\}$ ．

問題 10.10.7　次の式を計算しなさい： $\tan^{-1}(\tan 9)$ ．

---

4)　$\sin^{-1}$ も arcsin も “アークサイン” と言います．

5)　$\cos^{-1}$ も arccos も “アークコサイン” と言います．

6)　$\tan^{-1}$ も arctan も “アークタンジェント” と言います．