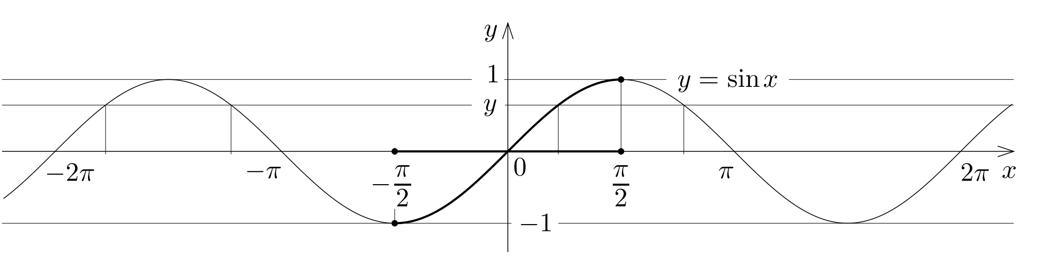
§10.10　逆三角関数

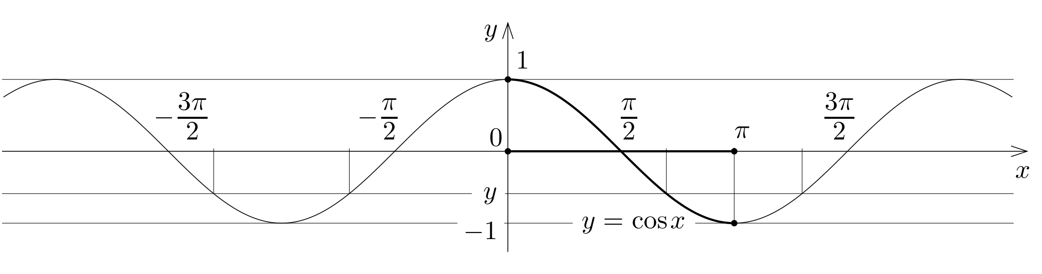
三角関数の逆関数を考えます．定理7.6.2を思い起こして下さい：関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯1つだけならば，f の逆関数がある．

まず正弦関数 $\sin x$ の逆関数を考えます．



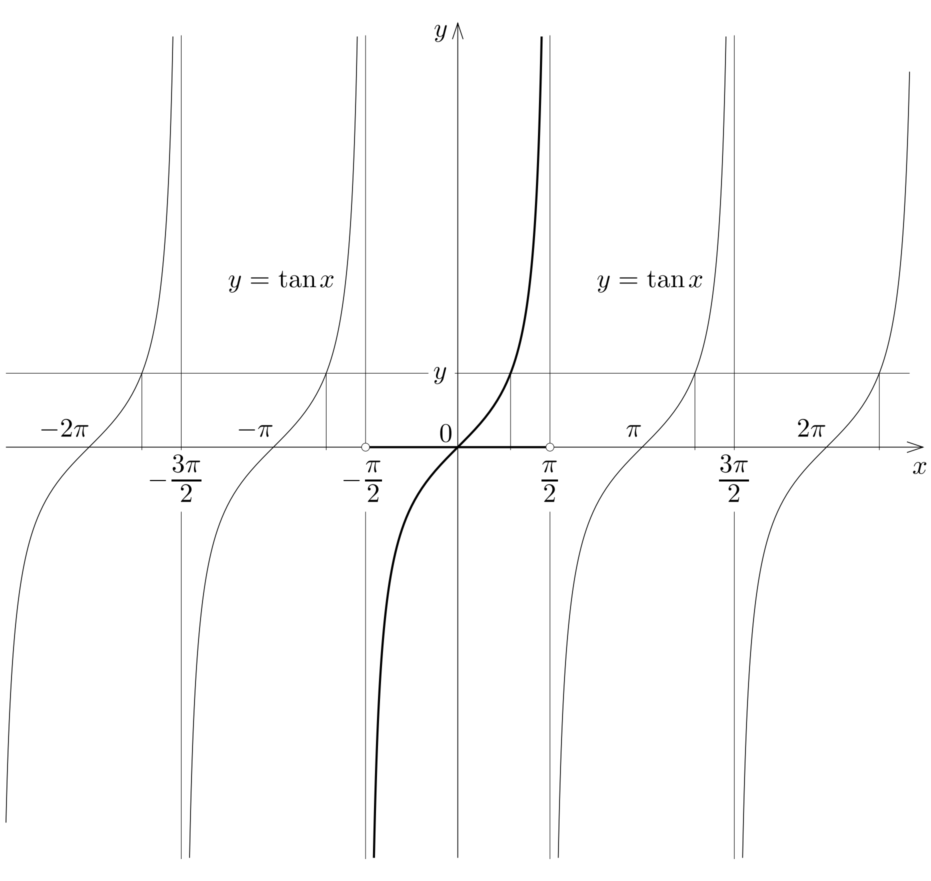
正弦関数 $y=\sin x$ グラフを見ると分かるように，$-1\le y\le 1$ となる実数 y に対して $\sin x=y$ となる実数 x の値は数多くあります．ですから，このままでは正弦関数 $\sin x$ の逆関数があるとはいえません．しかし，x の値を $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ となる範囲に限れば，$\sin x=y$ となる実数 x の値は唯一つだけです．つまり，正弦関数 $\sin x$ の定義域を区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ だけに制限すると，区間 $[-1,1]$ の各実数 y に対して $\sin x=y$ となる実数 x は唯一つだけです．従って，定理7.6.2より，定義域を区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ に制限した正弦関数 $\sin x$ の逆関数があります．区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の逆関数を**逆正弦関数**といい，実数 x に対するその値を $\sin^{-1}x$ と書き表します[5]．関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は $[-1,1]$ です；つまり，$-1\le x\le 1$ である実数 x に限り $\sin^{-1}x$ の値が定義できます．

次に余弦関数 $\cos x$ の逆関数を考えます．



余弦関数 $y=\cos x$ グラフを見ると分かるように，$-1\le y\le 1$ となる実数 y に対して $\cos x=y$ となる実数 x の値は数多くあります．しかし，x の値を $0\le x\le\pi$ となる範囲に限ると，区間 $[-1,1]$ の各実数 y に対して $\cos x=y$ となる実数 x は唯一つだけです．従って，定理7.6.2より，定義域を区間 $[0,\pi]$ に制限した余弦関数 $\cos x$ の逆関数があります．区間 $[0,\pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の逆関数を**逆余弦関数**といい，実数 x に対するその値を $\cos^{-1}x$ と書き表します[6]．逆関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は $[-1,1]$ です；つまり，$-1\le x\le 1$ である実数 x に限り $\cos^{-1}x$ の値が定義できます．

最期に正接関数 $\tan x$ の逆関数を考えます．



正接関数 $y=\tan x$ グラフを見ると分かるように，各実数 y に対して $\tan x=y$ となる実数 x の値は数多くあります．しかし，正接関数 $\tan x$ の定義域を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ だけに制限すると，任意の実数 y に対して $\tan x=y$ となる実数 x は唯一つだけです．従って，定理7.6.2より，定義域を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ に制限した正接関数 $\tan x$ の逆関数があります．区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の逆関数を**逆正接関数**といい，実数 x に対するその値を $\tan^{-1}x$ と書き表します[7]．関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は実数全体です；つまり，任意の実数 u に対して $\tan^{-1}u$ の値が定義できます．

以上で述べたような，三角関数の逆関数を逆三角関数といいます．

逆関数と逆数とを混同しないで下さい．関数 $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ について，

$$\sin x \text{ の 逆数 は } \frac{1}{\sin x}=\mathrm{cosec}\,x \ , \qquad \sin x \text{ の 逆関数 は } \sin^{-1}x$$

です．このことは，例えば，関数 x^2 ($x>0$) について，

$$x^2 \text{ の 逆数 は } \frac{1}{x^2} \ , \qquad x^2 \text{ の 逆関数 は } \sqrt{x}$$

であることと同様です．

一般に，関数 f の逆関数の値域は元の関数 f の定義域でした（定理7.6.5）．逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の逆関数ですから，その値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ です．逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ は区間 $[0,\pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の逆関数ですから，その値域は $[0,\pi]$ です．逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の逆関数ですから，その値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ です．

> 実数 x について，
>
> $\sin^{-1}x$ の値がある条件は $-1\le x\le 1$ でこのとき $-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}$ ；
>
> $\cos^{-1}x$ の値がある条件は $-1\le x\le 1$ でこのとき $0\le\cos^{-1}x\le\pi$ ；
>
> x がどんな実数でも $\tan^{-1}x$ の値があって $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ ．

定理7.6.1を思いおこして下さい：関数 g が関数 f の逆関数であるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } u \text{ について } g\big(f(u)\big)=u \ ,$$
$$g \text{ の定義域の任意の要素 } v \text{ について } f\big(g(v)\big)=v \ .$$

このことを逆三角関数に適用します．逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ ($-1\le x\le 1$) は正弦関数 $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数ですから，

$$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \sin^{-1}(\sin u)=u \ ,$$
$$-1\le v\le 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \sin(\sin^{-1}v)=v \ .$$

逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ ($-1\le x\le 1$) は余弦関数 $\cos x$ ($0\le x\le\pi$) の逆関数ですから，

$$0\le u\le\pi \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \cos^{-1}(\cos u)=u \ ,$$
$$-1\le v\le 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } \cos(\cos^{-1}v)=v \ .$$

逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は正接関数 $\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数ですから，

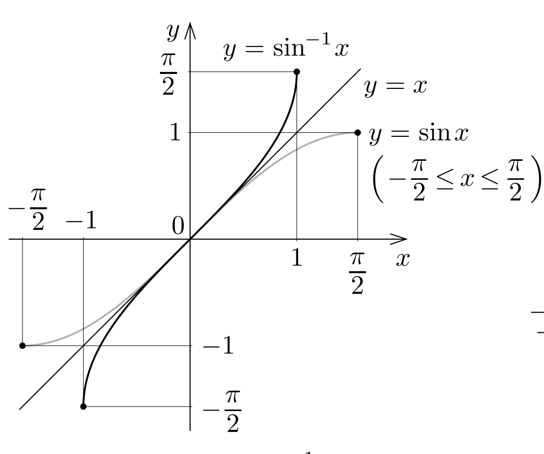
$$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } \tan^{-1}(\tan u)=u \ ,$$
$$\text{任意の実数 } v \text{ について } \tan(\tan^{-1}v)=v \ .$$

> **定理10.10.1**　三角関数と逆三角関数について以下のことが成り立つ．
>
> $-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}$ である任意の実数 u について $\sin^{-1}(\sin u)=u$ ．
>
> $0\le u\le\pi$ である任意の実数 u について $\cos^{-1}(\cos u)=u$ ．
>
> $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ である任意の実数 u について $\tan^{-1}(\tan u)=u$ ．
>
> 更に以下のことが成り立つ．
>
> $-1\le v\le 1$ である任意の実数 v について $\sin(\sin^{-1}v)=v$ ．
>
> $-1\le v\le 1$ である任意の実数 v について $\cos(\cos^{-1}v)=v$ ．
>
> 任意の実数 v について $\tan(\tan^{-1}v)=v$ ．

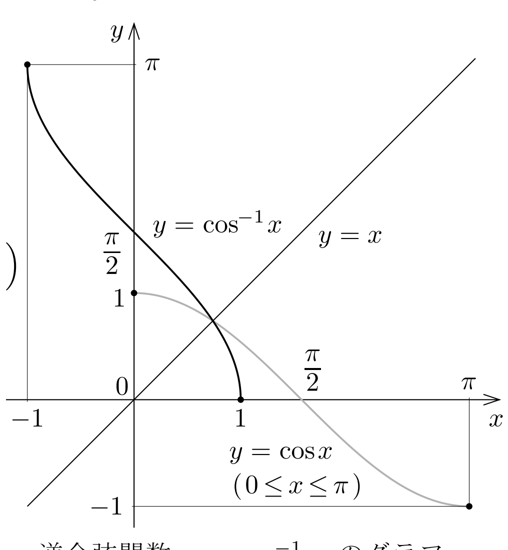
xy 座標平面において関数 f の逆関数のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理7.7）．この定理を三角関数・逆三角関数に適用すると以下のことが成り立ちます．

(1)　区間 $[-1,1]$ を定義域とする逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフは，区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする正弦関数 $y=\sin x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

(2)　区間 $[-1,1]$ を定義域とする逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフは，区間 $[0,\pi]$ を定義域とする余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．

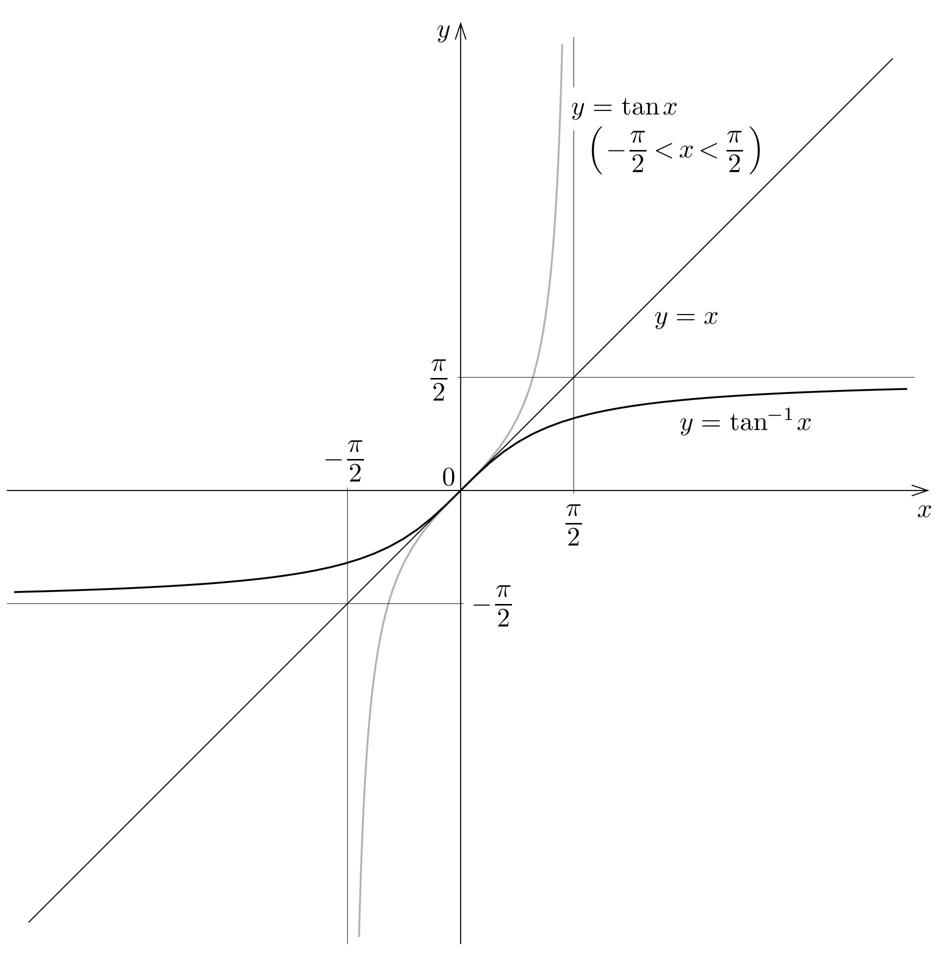


逆正弦関数 $y=\sin^{-1}x$ のグラフ



逆余弦関数 $y=\cos^{-1}x$ のグラフ

(3)　実数全体を定義域とする逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフは，区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする正接関数 $y=\tan x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．



逆正接関数 $y=\tan^{-1}x$ のグラフ

グラフを見ると見当がつくように，逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ と逆正接関数 $\tan^{-1}x$ とは奇関数です．つまり次の定理が成り立ちます．

定理10.10.2

$$-1\le x\le 1 \text{ である任意の実数 } x \text{ について } \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x \ ;$$
$$\text{任意の実数 } x \text{ について } \tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x \ .$$

証明　実数 x について $-1\le x\le 1$ とする．等式 $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ を導く．$y=\sin^{-1}x$ とおく．$-\sin y=\sin(-y)$ なので

$$\sin^{-1}(-\sin y) = \sin^{-1}\{\sin(-y)\} \ .$$

定理10.10.1 より $\sin^{-1}\{\sin(-y)\}=-y$ なので

$$\sin^{-1}(-\sin y) = -y \ .$$

$y=\sin^{-1}x$ なので

$$\sin^{-1}\{-\sin(\sin^{-1}x)\} = -\sin^{-1}x \ .$$

定理10.10.1 より $\sin(\sin^{-1}x)=x$ なので，$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ ．

任意の実数 x について $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ となることも同様に証明できる．

（証明終り）

因みに，逆余弦関数については次のようになります：$-1\le x\le 1$ である任意の実数 x について $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ ．

例題　以下の値を求める：$\sin^{-1}\frac{1}{2}$，$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$，$\tan^{-1}\sqrt{3}$，$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ ．

定理10.10.1と定理10.10.2とを用いる．

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ なので，

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \ , \qquad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin^{-1}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \ .$$

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ なので，

$$\tan^{-1}\sqrt{3}=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3} \ , \qquad \tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\tan^{-1}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3} \ .$$

終

問題 10.10.1　以下の逆三角関数の値を求めなさい．

(1) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．　(2) $\sin^{-1}0$ ．　(3) $\sin^{-1}(-1)$ ．

(4) $\tan^{-1}1$ ．　(5) $\tan^{-1}0$ ．　(6) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ．

例題　次の式を計算する：$\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ ．

〔解説〕 $x=\cos^{-1}\frac{3}{4}$ とおく．$\sin x$ を計算する．

$$\cos x = \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \ .$$

従って，

$$\sin^2x = 1-\cos^2x = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ .$$

$0\le\cos^{-1}\frac{3}{4}\le\pi$ なので $0\le x\le\pi$ なので $\sin x\ge 0$ ．よって

$$\sin x = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

故に，$\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)=\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ．

終

問題 10.10.2　次の式を計算しなさい：$\cos\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ．

例題　次の式を計算する：$\cos(\tan^{-1}3)$ ．

〔解説〕 $x=\tan^{-1}3$ とおく．$\cos x$ を計算する．

$$\tan x = \tan(\tan^{-1}3) = 3 \ .$$

従って，$1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ より，

$$\cos^2x = \frac{1}{1+\tan^2x} = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10} \ .$$

$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}3<\frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ なので $\cos x>0$ ．よって

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \ .$$

故に，$\cos(\tan^{-1}3)=\cos x=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ．

終

問題 10.10.3　次の式を計算しなさい：$\cos\left\{\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}$ ．

例題　次の式を計算する：$\sin^{-1}(\sin 6)$ ．

〔解説〕 実数 a について $-\frac{\pi}{2}\le a\le\frac{\pi}{2}$ のときに限り $\sin^{-1}(\sin a)=a$ ．この公式を適用できるように $\sin^{-1}(\sin 6)$ を変形する．正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π なので，$\sin 6=\sin(6-2\pi)$ ．$2\pi\fallingdotseq 6.28$ なので，$6-2\pi\fallingdotseq 6-6.28=-0.28$ ，よって $-\frac{\pi}{2}\le 6-2\pi\le\frac{\pi}{2}$ なので，

$$\sin^{-1}(\sin 6)=\sin^{-1}\{\sin(6-2\pi)\}=6-2\pi \ .$$

終

問題 10.10.4　次の式を計算しなさい：$\sin^{-1}\{\sin(-7)\}$ ．

問題 10.10.5　次の式を計算しなさい：$\sin^{-1}(\sin 13)$ ．

例題　次の式を計算する：$\tan^{-1}(\tan 4)$ ．

〔解説〕 実数 a について $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ のときに限り $\tan^{-1}(\tan a)=a$ ．この公式を適用できるように $\tan^{-1}(\tan 4)$ を変形する．正接関数 $\tan x$ の基本周期は π なので，$\tan 4=\tan(4-\pi)$ ．$\pi\fallingdotseq 3.14$ なので，$4-\pi\fallingdotseq 4-3.14=0.86$ ，よって $-\frac{\pi}{2}\le 4-\pi\le\frac{\pi}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan 4)=\tan^{-1}\{\tan(4-\pi)\}=4-\pi \ .$$

終

問題 10.10.6　次の式を計算しなさい：$\tan^{-1}\{\tan(-3)\}$ ．

問題 10.10.7　次の式を計算しなさい：$\tan^{-1}(\tan 9)$ ．

---

5) $\sin^{-1}$ は“アークサイン”と言います．

6) $\cos^{-1}$ は“アークコサイン”と言います．

7) $\tan^{-1}$ は“アークタンジェント”と言います．