

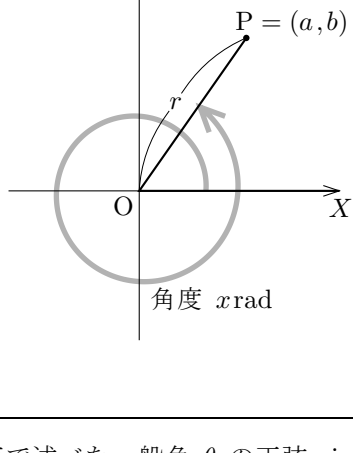
§ 10.2 三角関数の定義

正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ と正接関数 $\tan x$ とを考えます. これらを総称して三角関数 (trigonometric function) といいます.

定義 実数 x に対して, 正弦関数の値 $\sin x$, 余弦関数の値 $\cos x$, 正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する: XY 座標平面において, 原点 $O = (0,0)$ を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する一般角 $x \text{ rad}$ の動径に属する点 $P = (a,b)$ (但し $P \neq O$) について $\overline{OP} = r$ とおくと,

$$\sin x = \frac{b}{r}, \quad \cos x = \frac{a}{r},$$

$a \neq 0$ のとき $\tan x = \frac{b}{a}$.



実数 x に対する正弦関数の値 $\sin x$ の定義は, 6.3節で述べた一般角 θ の正弦 $\sin \theta$ の値の値の定義において, $\theta = x \text{ rad}$ としたものです. 従って, 実数 x に対する正弦関数 $\sin x$ の値は一般角 $x \text{ rad}$ の正弦 $\sin(x \text{ rad})$ の値と同じです. 同様に, 実数 x に対する余弦関数 $\cos x$ の値は一般角 $x \text{ rad}$ の余弦 $\cos(x \text{ rad})$ の値と同じです.

$$\sin x = \sin(x \text{ rad}), \quad \cos x = \cos(x \text{ rad}).$$

また, 実数 x に対する正接関数 $\tan x$ の値は, 一般角 $x \text{ rad}$ の正接 $\tan(x \text{ rad})$ の値があるならばこれと同じです:

$$\tan x = \tan(x \text{ rad}).$$

例 $\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{1}{6} \times 180^\circ = 30^\circ$ なので,

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6} \text{ rad}\right) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

実数 30 に対する正弦関数の値 $\sin 30$ は角度 30° の正弦の値 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$ とは異なります: $30 \text{ rad} = \frac{30}{\pi} \times \pi \text{ rad} = \frac{30}{\pi} \times 180^\circ = \left(\frac{5400}{\pi}\right)^\circ \approx 1718.87^\circ$ なので,

$$\sin 30 = \sin(30 \text{ rad}) \approx \sin 1718.87^\circ \approx -0.988. \quad \text{終}$$

例 $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ なので,

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = \cos 90^\circ = 0. \quad \text{終}$$

例 $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$ なので,

$$\tan \frac{\pi}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}. \quad \text{終}$$

以下の値は憶えて下さい.

$$\begin{aligned} \sin 0 &= \sin 0^\circ = 0, & \cos 0 &= \cos 0^\circ = 1, & \tan 0 &= \tan 0^\circ = 0; \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \frac{\pi}{6} &= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos \frac{\pi}{4} &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \tan \frac{\pi}{4} &= \tan 45^\circ = 1; \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} &= \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \\ \sin \frac{\pi}{2} &= \sin 90^\circ = 1, & \cos \frac{\pi}{2} &= \cos 90^\circ = 0, & \tan \frac{\pi}{2} & \text{の値は無い}. \end{aligned}$$

定理 6.4.6 を思い起こして下さい: 任意の一般角 θ について, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. 任意の実数 x に対する一般角 $x \text{ rad}$ について,

$$-1 \leq \sin(x \text{ rad}) \leq 1, \quad -1 \leq \cos(x \text{ rad}) \leq 1;$$

$\sin(x \text{ rad}) = \sin x$, $\cos(x \text{ rad}) = \cos x$ なので,

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

定理 10.2.1 任意の実数 x について,

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

定理 6.4.1 を思い起こして下さい: 任意の一般角 θ について, θ が 90° の奇数倍でないときに限り $\tan \theta$ の値が存在して $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. 任意の実数 x に対する一般角 $x \text{ rad}$ について, $\cos(x \text{ rad}) \neq 0$ のときに限り $\tan(x \text{ rad})$ の値が存在して

$$\tan(x \text{ rad}) = \frac{\sin(x \text{ rad})}{\cos(x \text{ rad})};$$

$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. $\tan(x \text{ rad}) = \tan x$, $\sin(x \text{ rad}) = \sin x$, $\cos(x \text{ rad}) = \cos x$ なので,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

定理 10.2.2 $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

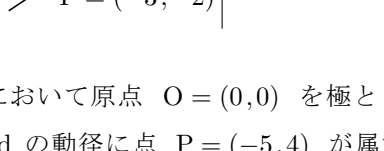
以後, 正弦関数と余弦関数については, 特に断りがない限り, 定義域は実数全体とします. また, 正接関数については, 特に断りがない限り, $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数の全体とします.

定義に従って三角関数の値を求めてみます.

例題 実数 x に対して, XY 座標平面において原点 $O = (0,0)$ を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 $x \text{ rad}$ の動径に点 $P = (-3,-2)$ が属すとす. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求め.

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{13}.$$

正弦・余弦・正接の定義より,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \\ \cos x &= \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \\ \tan x &= \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$


問題 10.2.1 実数 x に対して, XY 座標平面において原点 $O = (0,0)$ を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 $x \text{ rad}$ の動径に点 $P = (-5,4)$ が属とします. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求めなさい.

例題 実数 x に対して, XY 座標平面において原点 $O = (0,0)$ を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 $x \text{ rad}$ の動径に点 $P = (0,4)$ が属とす. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求め.

$\overline{OP} = 4$ なので, $\sin x = \frac{4}{4} = 1$, $\cos x = \frac{0}{4} = 0$. 点 P の X 座標が 0 なので, $\tan x$ の値は無い.

問題 10.2.2 実数 x に対して, XY 座標平面において原点 $O = (0,0)$ を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 $x \text{ rad}$ の動径に点 $P = (0,-3)$ が属とします. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求めなさい.

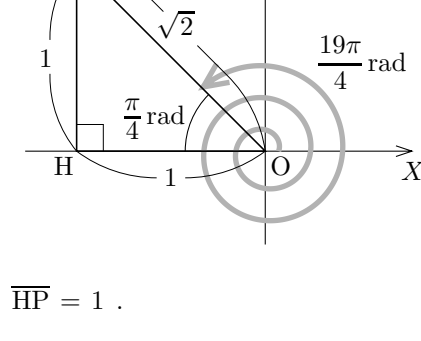
例解 $\frac{19\pi}{4}$ の正弦 $\sin \frac{19\pi}{4}$, 余弦 $\cos \frac{19\pi}{4}$, 正接 $\tan \frac{19\pi}{4}$ の各々の値を求めます. XY 座標平面において, 原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 $\frac{19\pi}{4} \text{ rad}$ の動径に属する点 P ($P \neq O$) をとり, 点 P から X 軸に下ろした垂線の足を H とおき, 直角三角形 OPH に着目します.

$$\begin{aligned} \angle POH &= \pi \text{ rad} - \left(\frac{19\pi}{4} \text{ rad} - 4\pi \text{ rad}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ. \end{aligned}$$

よって三角形 OHP は直角二等辺三角形ですから,

$$\overline{PH} : \overline{HO} : \overline{OP} = 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

$r = \overline{OP} = \sqrt{2}$ とします. $P = (a,b)$ とおきます.



$$|a| = \overline{OH} = 1, \quad |b| = \overline{HP} = 1.$$

$a < 0$ なので $a = -1$, $b > 0$ なので $b = 1$. 従って,

$$\sin \frac{19\pi}{4} = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{19\pi}{4} = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan \frac{19\pi}{4} = \frac{b}{a} = -1. \quad \text{終}$$

問題 10.2.3 次の値を求めなさい: $\sin \frac{11\pi}{3}$, $\cos \frac{11\pi}{3}$, $\tan \frac{11\pi}{3}$.

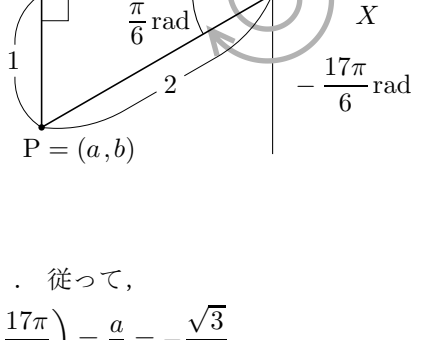
例解 $-\frac{17\pi}{6}$ の正弦 $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, 余弦 $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, 正接 $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$ の各々の値を求めます. XY 座標平面において, 原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 $-\frac{17\pi}{6} \text{ rad}$ の動径に属する点 P ($P \neq O$) をとり, 点 P から X 軸に下ろした垂線の足を H とおき, 直角三角形 OPH に着目します.

$$\angle POH = 3\pi \text{ rad} - \frac{17\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ.$$

よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60° と 90° なので,

$$\overline{HP} : \overline{PO} : \overline{OH} = 1 : 2 : \sqrt{3}.$$

$r = \overline{OP} = 2$ とします. $P = (a,b)$ とおきます.



$$|a| = \overline{OH} = \sqrt{3}, \quad |b| = \overline{HP} = 1.$$

$a < 0$ なので $a = -\sqrt{3}$, $b < 0$ なので $b = -1$. 従って,

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) &= \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}, & \cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) &= \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right) &= \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 10.2.4 次の値を求めなさい: $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$.

更に正割関数, 余接関数, 余割関数の3個の三角関数を定義します. $\cos x \neq 0$ である実数 x に対して, x の正割 (secant) $\sec x$ を次のように定義します:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

$\cos x \neq 0$ である実数 x に正割 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ を対応させる関数を正割関数といいます. また, $\sin x \neq 0$ である実数 x に対して, x の余接 (cotangent) $\cot x$ 及び x の余割 (cosecant) $\text{cosec } x$ を次のように定義します:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}.$$

$\sin x \neq 0$ である実数 x に余接 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ を対応させる関数を余接関数といい,

$\sin x \neq 0$ である実数 x に余割 $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$ を対応させる関数を余割関数といいます.

例題 次の値を求め: $\cot \frac{\pi}{6}$, $\sec \frac{\pi}{3}$, $\text{cosec } \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \cot \frac{\pi}{6} &= \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}. \\ \sec \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2. \\ \text{cosec } \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 10.2.5 以下の値を求めなさい.

(1) $\cot \frac{\pi}{3}$. (2) $\sec \frac{\pi}{4}$. (3) $\text{cosec } \frac{\pi}{6}$.