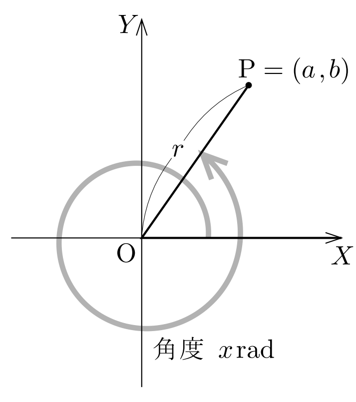
§10.2　三角関数の定義

正弦関数 (sine function) と**余弦関数** (cosine function) と**正接関数** (tangent function) とを定義します．これらを総称して三角関数 (trigonometric functuon) といいます．

定義　実数 x に対して，正弦関数の値 $\sin x$, 余弦関数の値 $\cos x$, 正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する：XY 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する一般角 $x\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$ （但し $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ） について $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおくとき，

$$\sin x=\frac{b}{r}\ ,\qquad \cos x=\frac{a}{r}\ ,$$

$$a\neq 0 \text{ のとき}\quad \tan x=\frac{b}{a}\ .$$



実数 x に対する正弦関数の値 $\sin x$ の定義は，6.3節で述べた一般角 θ の正弦 $\sin\theta$ の値の定義において $\theta=x\mathrm{rad}$ としたものです．従って，正弦関数の値 $\sin x$ は一般角 $x\mathrm{rad}$ の正弦 $\sin(x\mathrm{rad})$ と同じです．同様に，余弦関数の値 $\cos x$ は一般角 $x\mathrm{rad}$ の余弦 $\cos(x\mathrm{rad})$ と同じです.

$$\sin x=\sin(x\mathrm{rad})\ ,\qquad \cos x=\cos(x\mathrm{rad})\ .$$

一般角 θ が $90^\circ=\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないとき正接 $\tan\theta$ の値がありました．実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，一般角 $x\mathrm{rad}$ は $\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないので，正接 $\tan(x\mathrm{rad})$ の値があり，正接関数の値 $\tan x$ は $\tan(x\mathrm{rad})$ と同じです；

$$\text{実数 } x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき}\quad \tan x=\tan(x\mathrm{rad})\ .$$

例　$\frac{\pi}{6}\mathrm{rad}=\frac{1}{6}\times180^\circ=30^\circ$ なので，

$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\mathrm{rad}\right)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}\ .$$

実数 30 に対する正弦関数の値 $\sin30$ は角度 30° の正弦の値 $\sin30^\circ=\frac{1}{2}=0.5$ とは異なります： $30\mathrm{rad}=\frac{30}{\pi}\times\pi\mathrm{rad}=\frac{30}{\pi}\times180^\circ=\left(\frac{5400}{\pi}\right)^\circ\fallingdotseq1718.87^\circ$ なので，

$$\sin30=\sin(30\mathrm{rad})\fallingdotseq\sin1718.87^\circ\fallingdotseq-0.988\ .$$

終

例　$\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$ なので，

$$\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}\right)=\cos90^\circ=0\ .$$

終

例　$\frac{\pi}{3}\mathrm{rad}=\frac{1}{3}\times180^\circ=60^\circ$ なので，

$$\tan\frac{\pi}{3}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{rad}\right)=\tan60^\circ=\sqrt{3}\ .$$

終

以下の値は憶えて下さい.

$$\sin0=\sin0^\circ=0\ ,\qquad \cos0=\cos0^\circ=1\ ,\qquad \tan0=\tan0^\circ=0\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin30^\circ=\frac{1}{2}\ ,\qquad \cos\frac{\pi}{6}=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad \tan\frac{\pi}{6}=\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{4}=\sin45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\qquad \cos\frac{\pi}{4}=\cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\qquad \tan\frac{\pi}{4}=\tan45^\circ=1\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{3}=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad \cos\frac{\pi}{3}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}\ ,\qquad \tan\frac{\pi}{3}=\tan60^\circ=\sqrt{3}\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin90^\circ=1\ ,\qquad \cos\frac{\pi}{2}=\cos90^\circ=0\ ,\qquad \tan\frac{\pi}{2} \text{ の値は無い}\ .$$

定理6.4.6を思い起こして下さい：任意の一般角 θ について， $-1\le\sin\theta\le1$, $-1\le\cos\theta\le1$ ．任意の実数 x に対する一般角 $x\mathrm{rad}$ について，

$$-1\le\sin(x\mathrm{rad})\le1\ ,\qquad -1\le\cos(x\mathrm{rad})\le1\ ;$$

$\sin(x\mathrm{rad})=\sin x$, $\cos(x\mathrm{rad})=\cos x$ なので，

$$-1\le\sin x\le1\ ,\qquad -1\le\cos x\le1\ .$$

定理 10.2.1　任意の実数 x について，

$$-1\le\sin x\le1\ ,\qquad -1\le\cos x\le1\ .$$

定理6.4.1を思い起こして下さい：一般角 θ が角度 $90^\circ=\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないとき $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ．実数 x について，一般角 $x\mathrm{rad}$ が角度 $\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないとき，つまり x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$\tan(x\mathrm{rad})=\frac{\sin(x\mathrm{rad})}{\cos(x\mathrm{rad})}\ ,$$

$\tan(x\mathrm{rad})=\tan x$, $\sin(x\mathrm{rad})=\sin x$, $\cos(x\mathrm{rad})=\cos x$ なので

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

定理 10.2.2　任意の実数 x について，

$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき}\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

以後，正弦関数と余弦関数とについては，特に断りがない限り，定義域は実数全体とします．また，正接関数については，特に断りがない限り， $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数の全体とします.

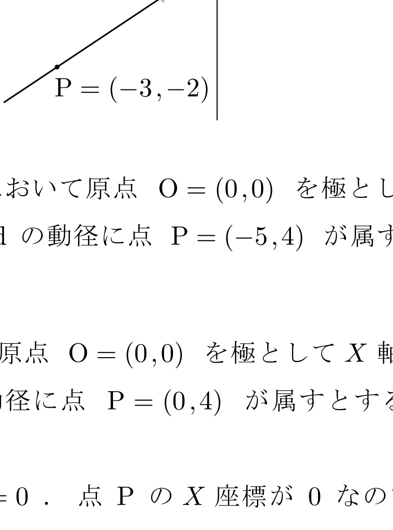
定義に従って三角関数の値を求めてみます.

例題　実数 x に対して， XY 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度 $x\mathrm{rad}$ の動径に点 $\mathrm{P}=(-3,-2)$ が属すとする. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求める.

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{13}$.

正弦・余弦・正接の定義より，

$$\sin x=\frac{-2}{\sqrt{13}}=-\frac{2}{\sqrt{13}}\ ,$$
$$\cos x=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,$$
$$\tan x=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}\ .$$



終

問題 10.2.1　実数 x に対して， XY 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度 $x\mathrm{rad}$ の動径に点 $\mathrm{P}=(-5,4)$ が属すとします． $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求めなさい.

例題　実数 x に対して， XY 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度 $x\mathrm{rad}$ の動径に点 $\mathrm{P}=(0,4)$ が属すとする. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求める.

$\overline{\mathrm{OP}}=4$ なので， $\sin x=\frac{4}{4}=1$ ， $\cos x=\frac{0}{4}=0$ ．点 P の X 座標が 0 なので， $\tan x$ の値は無い.

終

問題 10.2.2　実数 x に対して， XY 座標平面において原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度 $x\mathrm{rad}$ の動径に点 $\mathrm{P}=(0,-3)$ が属すとします． $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の値を求めなさい.

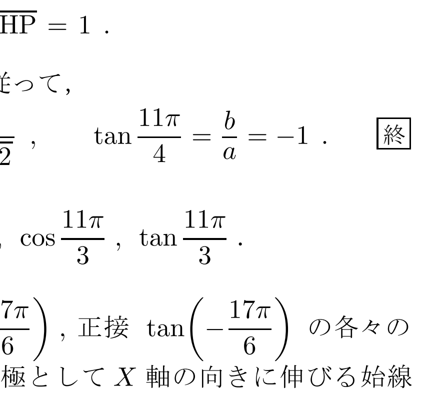
例解　$\frac{19\pi}{4}$ の正弦 $\sin\frac{19\pi}{4}$, 余弦 $\cos\frac{19\pi}{4}$, 正接 $\tan\frac{19\pi}{4}$ の各々の値を求めます. XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度 $\frac{19\pi}{4}\mathrm{rad}$ の動径に属す点 P （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，点 P から X 軸に下ろした垂線の足を H とおき，直角三角形 OPH に着目します.

$$\angle\mathrm{POH}=\pi\mathrm{rad}-\left(\frac{19\pi}{4}\mathrm{rad}-4\pi\mathrm{rad}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}\mathrm{rad}=45^\circ\ .$$

よって三角形 OHP は直角二等辺三角ですから，

$$\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{HO}}:\overline{\mathrm{OP}}=1:1:\sqrt{2}\ .$$

$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$ とします． $\mathrm{P}=(a,b)$ とおきます.



$$|a|=\overline{\mathrm{OH}}=1\ ,\qquad |b|=\overline{\mathrm{HP}}=1\ .$$

$a<0$ なので $a=-1$ ， $b>0$ なので $b=1$ ．従って，

$$\sin\frac{11\pi}{4}=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\qquad \cos\frac{11\pi}{4}=\frac{a}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\qquad \tan\frac{11\pi}{4}=\frac{b}{a}=-1\ .$$

終

問題 10.2.3　次の式の値を求めなさい： $\sin\frac{11\pi}{3}$, $\cos\frac{11\pi}{3}$, $\tan\frac{11\pi}{3}$.

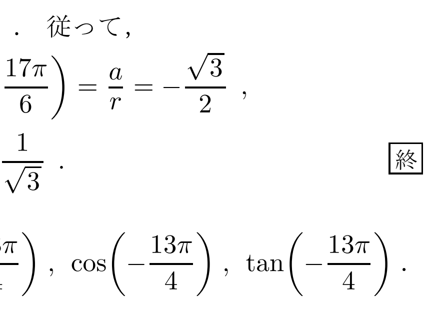
例解　$-\frac{17\pi}{6}$ の正弦 $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, 余弦 $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, 正接 $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$ の各々の値を求めます. XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する角度 $-\frac{17\pi}{6}\mathrm{rad}$ の動径に属す点 P （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，点 P から X 軸に下ろした垂線の足を H とおき，直角三角形 OPH に着目します.

$$\angle\mathrm{POH}=3\pi\mathrm{rad}-\frac{17\pi}{6}\mathrm{rad}=\frac{\pi}{6}\mathrm{rad}=30^\circ\ .$$

よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60° と 90° なので，

$$\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{OH}}=1:2:\sqrt{3}\ .$$

$r=\overline{\mathrm{OP}}=2$ とします． $\mathrm{P}=(a,b)$ とおきます.



$$|a|=\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}\ ,\qquad |b|=\overline{\mathrm{HP}}=1\ .$$

$a<0$ なので $a=-\sqrt{3}$ ， $b<0$ なので $b=-1$ ．従って，

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)=\frac{b}{r}=-\frac{1}{2}\ ,\qquad \cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)=\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

終

問題 10.2.4　次の式の値を求めなさい： $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$.

更に正割関数と余割関数と余接関数との 3 個の三角関数を定義します．正割関数 (secant function) とは， $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない各実数 x に $\frac{1}{\cos x}$ の値を対応させる関数です．正割関数の値を $\sec x$ と書き表します：

$$\text{実数 } x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき}\quad \sec x=\frac{1}{\cos x}\ .$$

余割関数 (cosecant function) とは， π の整数倍でない各実数 x に $\frac{1}{\sin x}$ の値を対応させる関数です．余割関数の値を $\mathrm{cosec}\,x$ と書き表します：

$$\text{実数 } x \text{ が } \pi \text{ の整数倍でないとき}\quad \mathrm{cosec}\,x=\frac{1}{\sin x}\ .$$

余接関数 (cotangent function) とは， π の整数倍でない各実数 x に $\frac{\cos x}{\sin x}$ の値を対応させる関数です．余接関数の値を $\cot x$ と書き表します：

$$\text{実数 } x \text{ が } \pi \text{ の整数倍でないとき}\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\ .$$

例題　次の式の値を求める： $\cot\frac{\pi}{6}$, $\sec\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{cosec}\frac{\pi}{4}$.

$$\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\ .$$
$$\sec\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\ .$$
$$\mathrm{cosec}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\ .$$

終

問題 10.2.5　以下の式の値を求めなさい.

(1)　$\cot\frac{\pi}{3}$.　　(2)　$\sec\frac{\pi}{4}$.　　(3)　$\mathrm{cosec}\frac{\pi}{6}$.