

§ 10.3 還元公式

任意の実数 x について、定理 6.4.3 より $\sin(-x \text{ rad}) = -\sin(x \text{ rad})$ なので、

$$\sin(-x) = \sin(-x \text{ rad}) = -\sin(x \text{ rad}) = -\sin x .$$

同様に、定理 6.4.3 より $\cos(-x \text{ rad}) = \cos(x \text{ rad})$ なので、

$$\cos(-x) = \cos(-x \text{ rad}) = \cos(x \text{ rad}) = \cos x .$$

更に、定理 10.2.2 より、 $\cos x \neq 0$ のとき、

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x .$$

定理 10.3.1 任意の実数 x について、

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x , & \cos(-x) &= \cos x , \\ \cos x \neq 0 \text{ のとき} & \tan(-x) &= -\tan x . \end{aligned}$$

つまり、余弦関数 $\cos x$ は偶関数で、正弦関数 $\sin x$ と正接関数 $\tan x$ とは奇関数です。

x は任意の実数とします。定理 6.5 より

$$\sin(x \text{ rad} + 90^\circ) = \cos(x \text{ rad}) = \cos x ,$$

$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ なので

$$\sin(x \text{ rad} + 90^\circ) = \sin\left(x \text{ rad} + \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}\right\} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

よって $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. また、定理 6.5 より

$$\cos(x \text{ rad} + 90^\circ) = -\sin(x \text{ rad}) = -\sin x ,$$

$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ なので

$$\cos(x \text{ rad} + 90^\circ) = \cos\left(x \text{ rad} + \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = \cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

よって $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

実数 X について $\sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = \cos X$ つまり $\cos X = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$, この等式において $X = x - \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin x .$$

実数 X について $\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin X$ なので $\sin X = -\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$, この等式において $X = x - \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos x .$$

定理 10.3.2 任意の実数 x について、

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \quad (\text{複号同順}) , \quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x \quad (\text{複号同順}) .$$

x は任意の実数とします。実数 X について $\sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = \cos X$; この等式において $X = x + \frac{\pi}{2}$ とすると

$$\sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x ,$$

$\sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin(x + \pi)$ なので $\sin(x + \pi) = -\sin x$. また、実数 X について $\cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin X$; この等式において $X = x + \frac{\pi}{2}$ とすると

$$\cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x ,$$

$\cos\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos(x + \pi)$ なので $\cos(x + \pi) = -\cos x$. 同様に、

$$\sin(x - \pi) = \sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x ,$$

$$\cos(x - \pi) = \cos\left\{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x .$$

定理 10.3.3 任意の実数 x について、

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x , \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos x .$$

x は任意の実数とします。実数 X について $\sin(X + \pi) = -\sin X$; この等式において $X = x + \pi$ とすると

$$\sin\{(x + \pi) + \pi\} = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) = \sin x ,$$

$\sin\{(x + \pi) + \pi\} = \sin(x + 2\pi)$ なので $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. また、実数 X について $\cos(X + \pi) = -\cos X$; この等式において $X = x + \pi$ とすると

$$\cos\{(x + \pi) + \pi\} = -\cos(x + \pi) = -(-\cos x) = \cos x ,$$

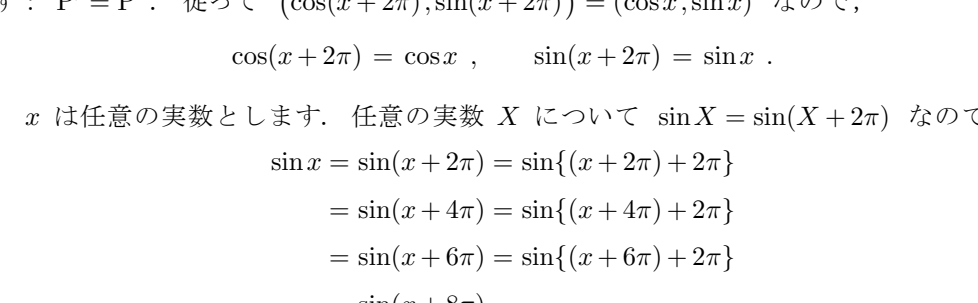
$\cos\{(x + \pi) + \pi\} = \cos(x + 2\pi)$ なので $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

こうして次のことが分かります：任意の実数 x について、

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x .$$

このことは次のように考えても分かります。 XY 座標平面において原点 O を極として X 軸の向きに延びる OX を始線とします。実数 x に対して、次のような点 P をとります：始線 OX に対する角度 $x \text{ rad}$ の動径に P が属し、 $\overline{OP} = 1$. 更に、

次のような点 P' をとります：始線 OX に対する角度 $(x + 2\pi) \text{ rad}$ の動径に P' が属し、 $\overline{OP'} = 1$.



定理 6.4.4 より、

$$P = (\cos x, \sin x) , \quad P' = (\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) .$$

線分 OP' は線分 OP を更に 1 回転させたものですから、点 P' は点 P と一致します： $P' = P$. 従って $(\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi)) = (\cos x, \sin x)$ なので、

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x , \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x .$$

x は任意の実数とします。任意の実数 X について $\sin X = \sin(X + 2\pi)$ なので、

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x + 2\pi) = \sin\{(x + 2\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 4\pi) = \sin\{(x + 4\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 6\pi) = \sin\{(x + 6\pi) + 2\pi\} \\ &= \sin(x + 8\pi) = \dots \end{aligned}$$

同様に、任意の実数 X について $\sin X = \sin(X - 2\pi)$ なので、

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x - 2\pi) = \sin\{(x - 2\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 4\pi) = \sin\{(x - 4\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 6\pi) = \sin\{(x - 6\pi) - 2\pi\} \\ &= \sin(x - 8\pi) = \dots \end{aligned}$$

余弦関数 $\cos x$ についても同様のことが成り立ちます：

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos(x + 6\pi) = \cos(x + 8\pi) = \dots ,$$

$$\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 6\pi) = \cos(x - 8\pi) = \dots .$$

つまり次のようになります：

$$\sin(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \sin x , \quad \cos(x \pm (\pi \text{ の偶数倍})) = \cos x .$$

定理 10.3.4 任意の整数 n 及び任意の実数 x について、

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x , \quad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x .$$

実数 X について $\cos X \neq 0$ とします。定理 10.3.3 より $\sin(X + \pi) = -\sin X$, $\cos(X + \pi) = -\cos X$ なので、定理 10.1 より、 $\cos X \neq 0$ のとき、

$$\tan(X + \pi) = \frac{\sin(X + \pi)}{\cos(X + \pi)} = \frac{-\sin X}{-\cos X} = \frac{\sin X}{\cos X} = \tan X .$$

つまり $\tan X = \tan(X + \pi)$. このことから、実数 x について $\cos x \neq 0$ であるとき、

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(x + \pi) = \tan\{(x + \pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 2\pi) = \tan\{(x + 2\pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 3\pi) = \tan\{(x + 3\pi) + \pi\} \\ &= \tan(x + 4\pi) = \dots ; \end{aligned}$$

$\tan(X - \pi) = \tan\{(X - \pi) + \pi\} = \tan X$ つまり $\tan X = \tan(X - \pi)$ なので、

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(x - \pi) = \tan\{(x - \pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 2\pi) = \tan\{(x - 2\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 3\pi) = \tan\{(x - 3\pi) - \pi\} \\ &= \tan(x - 4\pi) = \dots \end{aligned}$$

定理 10.3.5 任意の整数 n 及び任意の実数 x について、

$$\cos x \neq 0 \text{ のとき} \tan(x \pm n\pi) = \tan x .$$

例題 $\sin \frac{29\pi}{3}$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \sin \frac{29\pi}{3} &= \sin\left(\frac{29\pi}{3} - 8\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) \\ &= -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\sin \frac{29\pi}{3} = \sin\left(\frac{29\pi}{3} - 10\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} . \quad \text{終}$$

問題 10.3.1 $\cos \frac{35\pi}{6}$ の値を求めなさい。

例題 $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。

$$\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{6} + 4\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= -\sin \frac{19\pi}{6} = -\sin\left(\frac{19\pi}{6} - 2\pi\right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 10.3.2 $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$ の値を求めなさい。

例題 $\tan \frac{14\pi}{3}$ の値を求めよ。

$$\tan \frac{14\pi}{3} = \tan\left(\frac{14\pi}{3} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} . \quad \text{終}$$

問題 10.3.3 $\tan \frac{17\pi}{6}$ の値を求めなさい。

問題 10.3.4 $\tan\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ の値を求めなさい。

例題 変数 x を含む式 $\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right)$ を、 $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する。

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 6\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin x) \\ &= \sin x . \end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\cos\left(x + \frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{15\pi}{2} - 8\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x . \quad \text{終}$$

問題 10.3.5 変数 x を含む式 $\sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right)$ を、 $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形しなさい。

例題 変数 x を含む式 $\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)$ を、 $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する。

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) &= \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 10\pi\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos x . \end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\sin\left(x - \frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{17\pi}{2} + 8\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x . \quad \text{終}$$

問題 10.3.6 変数 x を含む式 $\cos\left(x - \frac{21\pi}{2}\right)$ を、 $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形しなさい。

例題 変数 x を含む式 $\cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)$ を、 $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形する。

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{-\left(x - \frac{15\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x - \frac{15\pi}{2} + 8\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x . \end{aligned}$$

次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{15\pi}{2} - x - 8\pi\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left\{-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 10.3.7 変数 x を含む式 $\sin\left(\frac{25\pi}{2} - x\right)$ を、 $\sin x$ か $\cos x$ か $-\sin x$ か $-\cos x$ かのいずれかに変形しなさい。