§10.4　三角関数の周期

関数 f 及び 0 でない定数 p について，

$$f \text{ の定義域の任意の点 } x \text{ について}\quad f(x+p)=f(x)$$

となるとき，定数 p を f の**周期** (period) といいます．関数 f の周期が存在するとき，f を**周期関数** (periodic function) といいます [1]．

次のことが成り立ちました（定理 10.3.4）：任意の実数 x について，

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x\ ,\qquad \sin(x\pm 4\pi)=\sin x\ ,\qquad \sin(x\pm 6\pi)=\sin x\ ,\quad \cdots\ ;$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期です．余弦関数についても同様です：任意の実数 x について，

$$\cos(x\pm 2\pi)=\cos x\ ,\qquad \cos(x\pm 4\pi)=\cos x\ ,\qquad \cos(x\pm 6\pi)=\cos x\ ,\quad \cdots\ ;$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期です．また，次のことが成り立ちました（定理 10.3.5）：$\cos x \neq 0$ である任意の実数 x について，

$$\tan(x\pm\pi)=\tan x\ ,\qquad \tan(x\pm 2\pi)=\tan x\ ,\qquad \tan(x\pm 3\pi)=\tan x\ ,\qquad \cdots\ ;$$

よって，$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$ は正接関数 $\tan x$ の周期です．

周期関数の周期はこのように沢山あります [2] が，周期関数の正の周期の中で最小のものを f の基本周期 (fundamental period) といいます．多くの場合，単に周期というと基本周期のことを指します．次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は周期関数であり，その基本周期は 2π である．また，正接関数 $\tan x$ は周期関数であり，その基本周期は π である．

1 次関数と三角関数との合成関数の周期を考えます．

$\boxed{\text{例解}}$　1 次関数 $3x+5$ と正弦関数 $\sin x$ の合成関数を $g(x)$ とおきます：$g(x)=\sin(3x+5)$．このとき，任意の実数 x について，

$$\begin{aligned} g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left\{3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+5\right\}=\sin(3x+2\pi+5)\\ &=\sin\{(3x+5)+2\pi\}=\sin(3x+5)\\ &=g(x)\ , \end{aligned}$$

つまり $g\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=g(x)$．従って，$\dfrac{2\pi}{3}$ は合成関数 $g(x)=\sin(3x+5)$ の周期になります．更に調べると基本周期であると分かります [3]．　$\boxed{\text{終}}$

一般的に次の定理が成り立ちます．

> **定理 10.4.1**　定数 a と b とは実数で $a\neq 0$ とする．変数 x の関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{2\pi}{|a|}$ である．また，関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{\pi}{|a|}$ である．

$\boxed{\text{例}}$　$\sin\dfrac{7x-4}{3}=\sin\left(\dfrac{7}{3}x-\dfrac{4}{3}\right)$ なので，変数 x の関数 $\sin\dfrac{7x-4}{3}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{7}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{7}{3}}=\frac{6\pi}{7}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　$\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}=\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}x-\dfrac{2\pi}{5}\right)$ なので，変数 x の関数 $\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}}=\frac{10\pi}{3\pi}=\frac{10}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　$\tan\dfrac{8-5x}{7}=\tan\left(-\dfrac{5}{7}x+\dfrac{8}{7}\right)$ なので，変数 x の関数 $\tan\dfrac{8-5x}{7}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|-\frac{5}{7}\right|}=\frac{\pi}{\frac{5}{7}}=\frac{7\pi}{5}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.4.1}}$　以下の変数 x の関数の基本周期を求めなさい．

(1) 関数 $\sin\dfrac{4x-3}{5}$．　(2) 関数 $\cos\dfrac{\pi(5x+4)}{3}$．　(3) 関数 $\tan\dfrac{7-3x}{4}$．

$\boxed{\text{例解}}$　0 でない定数 p が周期となる周期関数 f に対して，合成関数 g を例えば次のように定めます：$g(x)=3f(x)-4$．定数 p が関数 f の周期ですから，f の定義域の任意の実数 x について，$f(x+p)=f(x)$ なので，

$$g(x+p)=3f(x+p)-4=3f(x)-4=g(x)\ .$$

従って定数 p は関数 $g(x)=3f(x)-4$ の周期になります；更に調べると基本周期であると分かります．　$\boxed{\text{終}}$

一般的に次の定理が成り立ちます．

> **定理 10.4.2**　定数 A と B とは実数で $A\neq 0$ とする．周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき，合成関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である．

$\boxed{\text{例}}$　変数 x の関数 $\sin\dfrac{\pi(5x+2)}{3}=\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{5\pi}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}}=\frac{6}{5}\ .$$

従って関数 $\dfrac{8}{7}\sin\dfrac{\pi(5x+2)}{3}+4$ の基本周期も $\dfrac{6}{5}$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　変数 x の関数 $\tan\dfrac{3x-4}{7}=\tan\left(\dfrac{3}{7}x+\dfrac{4}{7}\right)$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{3}{7}\right|}=\frac{\pi}{\frac{3}{7}}=\frac{7\pi}{3}\ .$$

従って関数 $\dfrac{9}{2}\tan\dfrac{3x-4}{7}+5$ の基本周期も $\dfrac{7\pi}{3}$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.4.2}}$　以下の変数 x の関数の基本周期を求めなさい．

(1) 関数 $\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$．(2) 関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$．(3) 関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$．

---

[1] 但し，定数関数は普通は周期関数とは考えません．

[2] 一般に，0 でない定数 p が関数 f の周期であるとき，$-p, \pm 2p, \pm 3p, \pm 4p, \ldots$ も f の周期です．

[3] 正の定数 p が合成関数 $g(x)=\sin(3x+5)$ の周期であるとする．$g(x+p)=g(x)$ なので，$\sin\{3(x+p)+5\}=\sin(3x+5)$，$\sin(3x+5+3p)=\sin(3x+5)$．$3x+5$ を y で置き換えると $\sin(y+3p)=\sin y$．よって $3p$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である．正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π なので，$3p\geq 2\pi$，$p\geq\dfrac{2\pi}{3}$．従って $\dfrac{2\pi}{3}$ が関数 $g(x)=\sin(3x+5)$ の基本周期である．