§10.4 三角関数の周期

関数 f 及び 0 でない定数 p について，

f の定義域の任意の点 x について　$f(x+p)=f(x)$

となるとき，定数 p を f の**周期** (period) といいます． 関数 f の周期が存在するとき，f を**周期関数** (periodic function) といいます [1]．

次のことが成り立ちました（定理 10.3.4）：任意の実数 x について，

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x\ ,\quad \sin(x\pm 4\pi)=\sin x\ ,\quad \sin(x\pm 6\pi)=\sin x\ ,\quad \cdots\ ;$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期です． 余弦関数についても同様です：任意の実数 x について，

$$\cos(x\pm 2\pi)=\cos x\ ,\quad \cos(x\pm 4\pi)=\cos x\ ,\quad \cos(x\pm 6\pi)=\cos x\ ,\quad \cdots\ ;$$

よって，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \ldots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期です． また，次のことが成り立ちました（定理 10.3.5）： $\cos x\neq 0$ である任意の実数 x について，

$$\tan(x\pm\pi)=\tan x\ ,\quad \tan(x\pm 2\pi)=\tan x\ ,\quad \tan(x\pm 3\pi)=\tan x\ ,\quad \cdots\ ;$$

よって，$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$ は正接関数 $\tan x$ の周期です．

周期関数の周期はこのように沢山あります [2] が，周期関数の正の周期の中で最小のものを f の基本周期 (fundamental period) といいます． 多くの場合，単に周期というと基本周期のことを指します． 次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は周期関数であり，その基本周期は 2π である． また，正接関数 $\tan x$ は周期関数であり，その基本周期は π である．

1 次関数と三角関数との合成関数の基本周期について次の定理が成り立ちます．

定理 10.4.1　定数 a と b とは実数で $a\neq 0$ とする． 変数 x の関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{2\pi}{|a|}$ である． また，関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\dfrac{\pi}{|a|}$ である．

証明　例として関数 $\sin(ax+b)$ を扱う．

$a>0$ のときを考える． 関数 $\sin(ax+b)$ を $f(x)$ とおく： $f(x)=\sin(ax+b)$ ． 任意の実数 x について，

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{2\pi}{a}\right) &= \sin\left\{a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right\}=\sin(ax+2\pi+b)\\ &= \sin\{(ax+b)+2\pi\}=\sin(ax+b)\\ &= f(x)\ , \end{aligned}$$

つまり $f\left(x+\dfrac{2\pi}{a}\right)=f(x)$ ． 従って，$\dfrac{2\pi}{a}$ は合成関数 $f(x)=\sin(ax+b)$ の周期である． 正の定数 p が合成関数 $f(x)=\sin(ax+b)$ の周期であるとする． $f(x+p)=f(x)$ なので， $\sin\{a(x+p)+b\}=\sin(ax+b)$ ， $\sin(ax+b+ap)=\sin(ax+b)$ ． $ax+b$ を y で置き換えると $\sin(y+ap)=\sin y$ ． よって ap は正弦関数 $\sin x$ の周期である． 正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π なので， $ap\geq 2\pi$ ， よって $p\geq\dfrac{2\pi}{a}$ ． 故に $\dfrac{2\pi}{a}$ は関数 $f(x)=\sin(ax+b)$ の正の最小の周期つまり基本周期である．

$a<0$ のときも考え併せると，$\dfrac{2\pi}{|a|}$ が関数 $\sin(ax+b)$ の基本周期である（詳細は略す）． （証明終り）

例　変数 x について　$\sin\dfrac{4-7x}{3}=\sin\left(-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{4}{3}\right)$ なので，x の関数 $\sin\dfrac{7x-4}{3}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{7}{3}}=\frac{6\pi}{7}\ .$$

終

例　変数 x について　$\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}=\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}x-\dfrac{2\pi}{5}\right)$ なので，x の関数 $\cos\dfrac{\pi(3x-2)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{5}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}}=\frac{10\pi}{3\pi}=\frac{10}{3}\ .$$

終

例　変数 x について　$\tan\dfrac{5x-8}{7}=\tan\left(\dfrac{5}{7}x-\dfrac{8}{7}\right)$ なので，x の関数 $\tan\dfrac{8-5x}{7}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{5}{7}\right|}=\frac{\pi}{\frac{5}{7}}=\frac{7\pi}{5}\ .$$

終

問題 10.4.1　以下の変数 x の関数の基本周期を求めなさい．

(1) 関数 $\sin\dfrac{\pi(5x+4)}{3}$ ．　(2) 関数 $\cos\dfrac{3-4x}{5}$ ．　(3) 関数 $\tan\dfrac{3x-7}{4}$ ．

周期関数と 1 次関数との合成関数の基本周期は次のようになります．

定理 10.4.2　定数 A と B とは実数で $A\neq 0$ とする． 周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき，合成関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である．

証明　関数 $g(x)$ を $g(x)=Af(x)+B$ とおく． 実数 p が $f(x)$ の周期であるとき，定義域の各実数 x について， $f(x+p)=f(x)$ なので

$$g(x+p)=Af(x+p)+B=Af(x)+B=g(x)\ ,$$

よって p は $g(x)$ の周期である． $g(x)=Af(x)+B$ より $f(x)=\dfrac{g(x)-B}{A}$ ． 定数 p が $g(x)$ の周期であるとき，定義域の各実数 x について， $g(x+p)=g(x)$ なので

$$f(x+p)=\frac{g(x+p)-B}{A}=\frac{g(x)-B}{A}=f(x)\ ,$$

よって p は $f(x)$ の周期である． このように，実数 p について，$f(x)$ の周期であることと $g(x)=Af(x)+B$ の周期であることとは同値である． 従って，関数 $f(x)$ の周期である実数の全体と関数 $Af(x)+B$ の周期である実数の全体とは一致する． 故に関数 $f(x)$ の基本周期は関数 $Af(x)+B$ の基本周期である． （証明終り）

例　変数 x の関数　$\sin\dfrac{\pi(5x+2)}{3}=\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{5\pi}{3}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}}=\frac{6}{5}\ .$$

従って関数 $\dfrac{8}{7}\sin\dfrac{\pi(5x+2)}{3}+4$ の基本周期も $\dfrac{6}{5}$ ．

終

例　変数 x の関数　$\tan\dfrac{3x-4}{7}=\tan\left(\dfrac{3}{7}x+\dfrac{4}{7}\right)$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{3}{7}\right|}=\frac{\pi}{\frac{3}{7}}=\frac{7\pi}{3}\ .$$

従って関数 $\dfrac{9}{2}\tan\dfrac{3x-4}{7}+5$ の基本周期も $\dfrac{7\pi}{3}$ ．

終

問題 10.4.2　以下の変数 x の関数の基本周期を求めなさい．

(1) 関数 $\cos\dfrac{8-5x}{3}+4$ ． (2) 関数 $7-4\sin\dfrac{\pi(6x-1)}{5}$ ． (3) 関数 $\dfrac{2}{5}\tan\dfrac{\pi(3x+5)}{4}$ ．

---

[1] 但し，定数関数は普通は周期関数とは考えません．

[2] 一般に，0 でない定数 p が関数 f の周期であるとき， $-p, \pm 2p, \pm 3p, \pm 4p, \ldots$ も f の周期です．