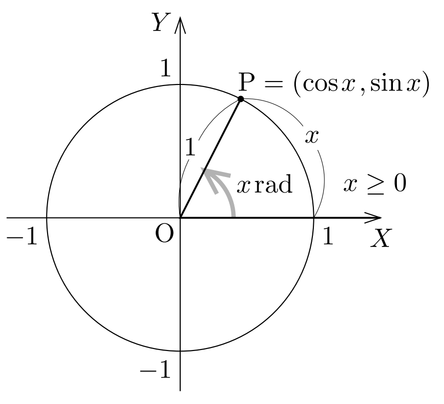
§10.5　三角関数のグラフ

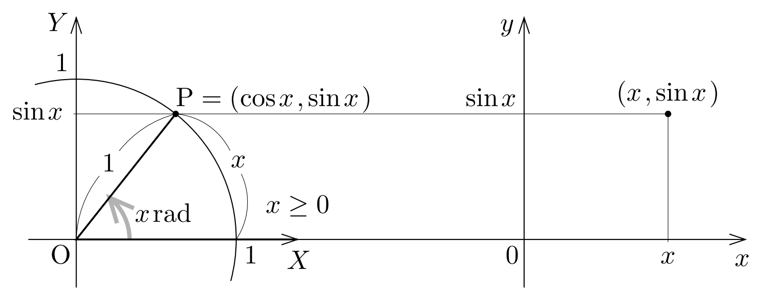
半径 1 の円を単位円といいます.

まず xy 座標平面において正弦関数のグラフを描きます. そのために，もう一つ別の座標系，XY 座標系を考えます. 実数 x に対して，XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径と，原点 O を中心とする単位円との共有点を P とおきます. $\overline{\mathrm{OP}}$ は単位円の半径ですから $\overline{\mathrm{OP}}=1$. 従って定理 6.4.5 より

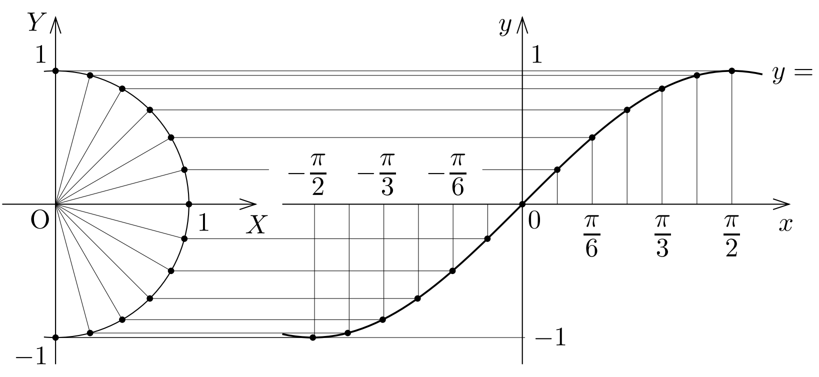


$$\mathrm{P}=(\cos x,\sin x)\ .$$

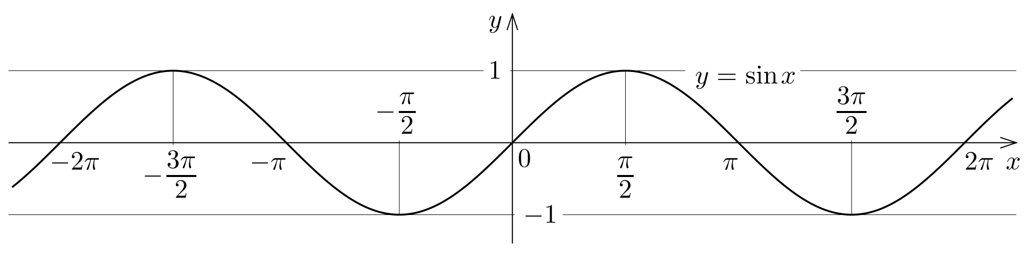
よって点 P の Y 座標は $\sin x$ です. xy 座標系を次のように定めます : x 軸と X 軸とが同じ向きで一直線に重なり，y 軸と Y 軸とが同じ向きである. xy 座標平面において，実数 x に対して例えば下図のように点 $(x,\sin x)$ をとります.



実数 x に対する点 $(x,\sin x)$ をつないで正弦関数 $y=\sin x$ のグラフを描きます.



正弦関数 $y=\sin x$ のグラフを延ばすと下図のようになります.



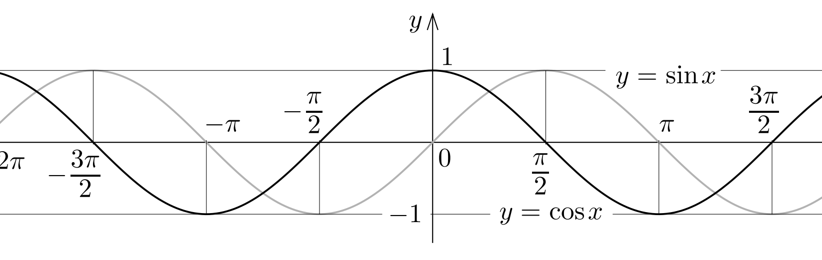
正弦関数 $y=\sin x$ のグラフ

前節で述べたように正弦関数 $\sin x$ は奇関数ですから，定理 7.8.2 より， $y=\sin x$ のグラフは原点に関して対称です. $y=\sin x$ のグラフの形の曲線を正弦曲線 (sine curve) といいます.

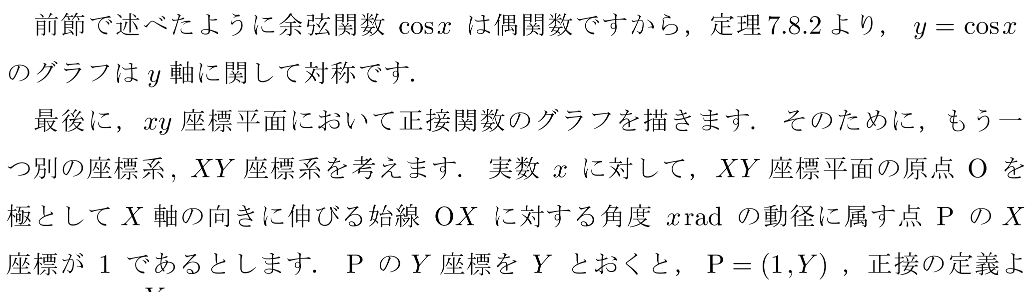
次に，xy 座標平面において余弦関数のグラフを描きます. 定理 10.3.2 を用います : 任意の実数 x について $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$. $t=x+\frac{\pi}{2}$ とおきます. このとき $t=x-\frac{\pi}{2}$. 関数 $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(t-\frac{\pi}{2},\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた点です. よって， $y=\cos x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた曲線です.



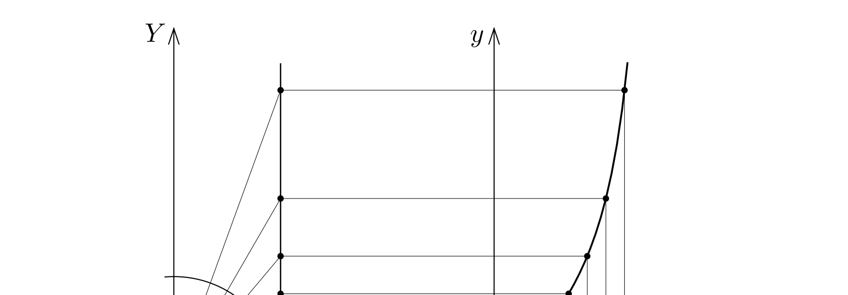
関数 $y=\cos x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフと同じ形で，下図のようになります.



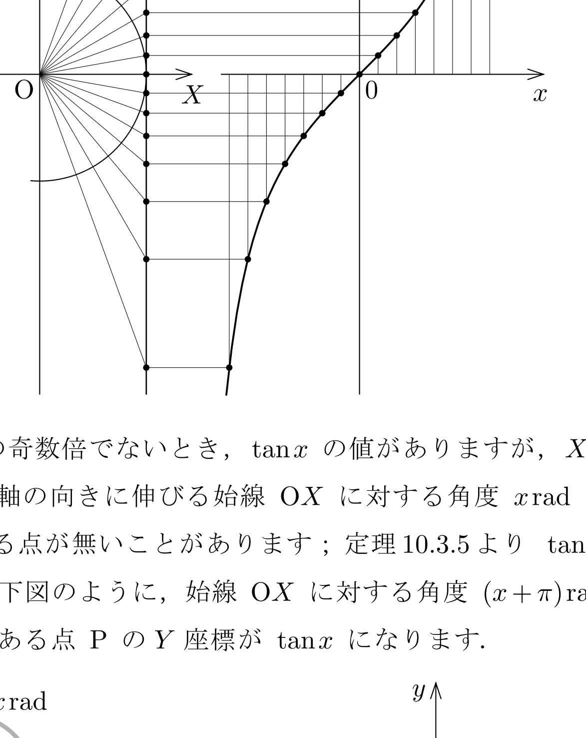
余弦関数 $y=\cos x$ のグラフ

前節で述べたように余弦関数 $\cos x$ は偶関数ですから，定理 7.8.2 より， $y=\cos x$ のグラフは y 軸に関して対称です.

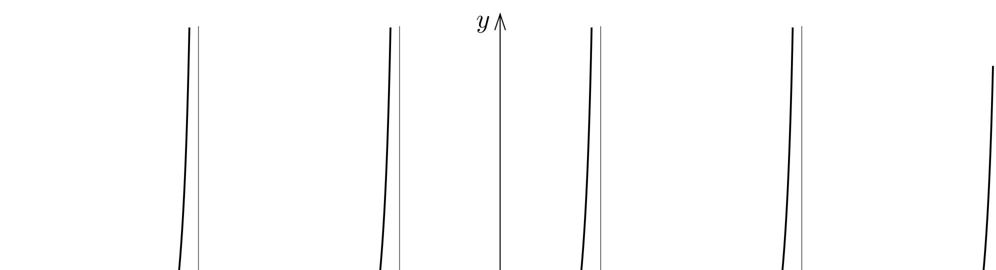
最後に，xy 座標平面において正接関数のグラフを描きます. そのために，もう一つ別の座標系，XY 座標系を考えます. 実数 x に対して，XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点 P の X 座標が 1 であるとします. P の Y 座標を Y とおくと， $\mathrm{P}=(1,Y)$ ，正接の定義より $\tan x=\frac{Y}{1}=Y$ なので， $Y=\tan x$. 従って点 P の Y 座標は $\tan x$ です. xy 座標系を次のように定めます : x 軸と X 軸とが同じ向きで一直線に重なり，y 軸と Y 軸とが同じ向きである. こうして実数 x に対して例えば下図のように点 $(x,\tan x)$ をとります.



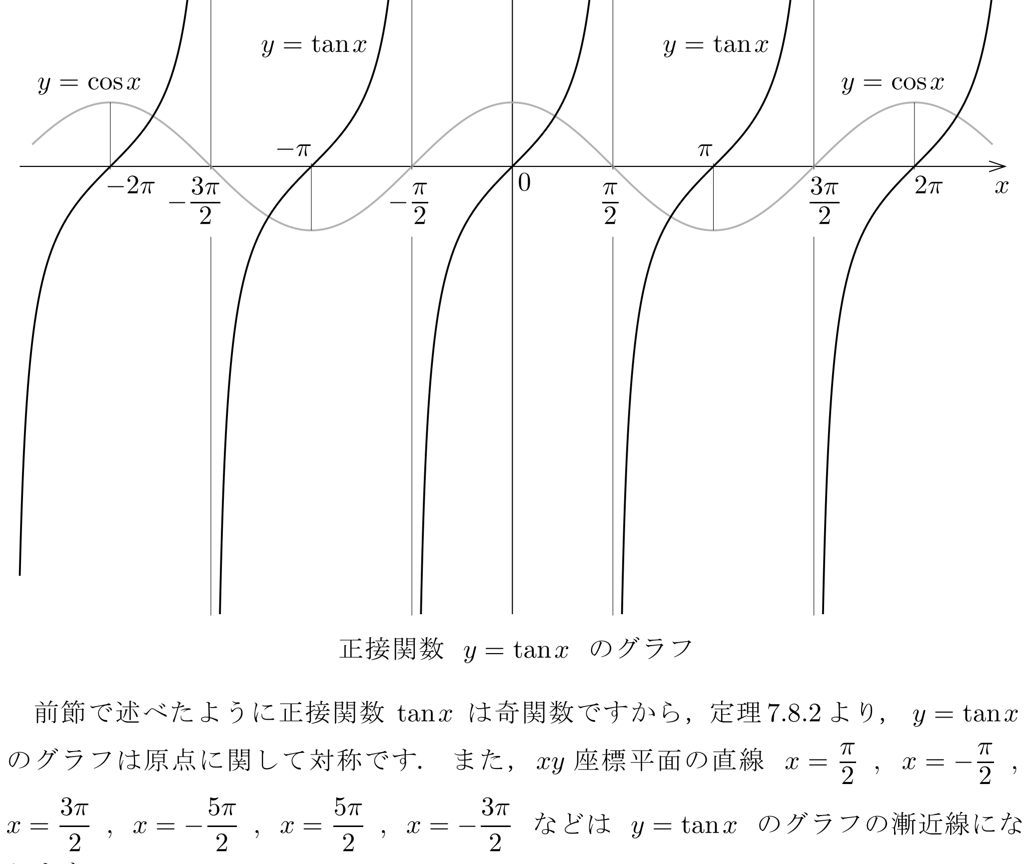
実数 x に対する点 $(x,\tan x)$ をつないで $y=\tan x$ のグラフを描きます.



実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，$\tan x$ の値がありますが，XY 座標平面の原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x$rad の動径に属す点で X 座標が 1 である点が無いことがあります ; 定理 10.3.5 より $\tan x=\tan(x+\pi)$ なので，このとき，下図のように，始線 OX に対する角度 $(x+\pi)$rad の動径に属す点で X 座標が 1 である点 P の Y 座標が $\tan x$ になります.



このように考えて正接関数 $y=\tan x$ のグラフを延ばすと下図のようになります.



正接関数 $y=\tan x$ のグラフ

前節で述べたように正接関数 $\tan x$ は奇関数ですから，定理 7.8.2 より， $y=\tan x$ のグラフは原点に関して対称です. また，xy 座標平面の直線 $x=\frac{\pi}{2}$ ， $x=-\frac{\pi}{2}$ ， $x=\frac{3\pi}{2}$ ， $x=-\frac{5\pi}{2}$ ， $x=\frac{5\pi}{2}$ ， $x=-\frac{3\pi}{2}$ などは $y=\tan x$ のグラフの漸近線になります.