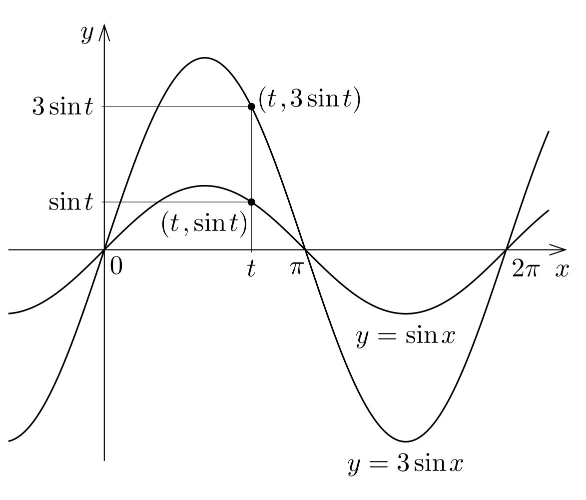
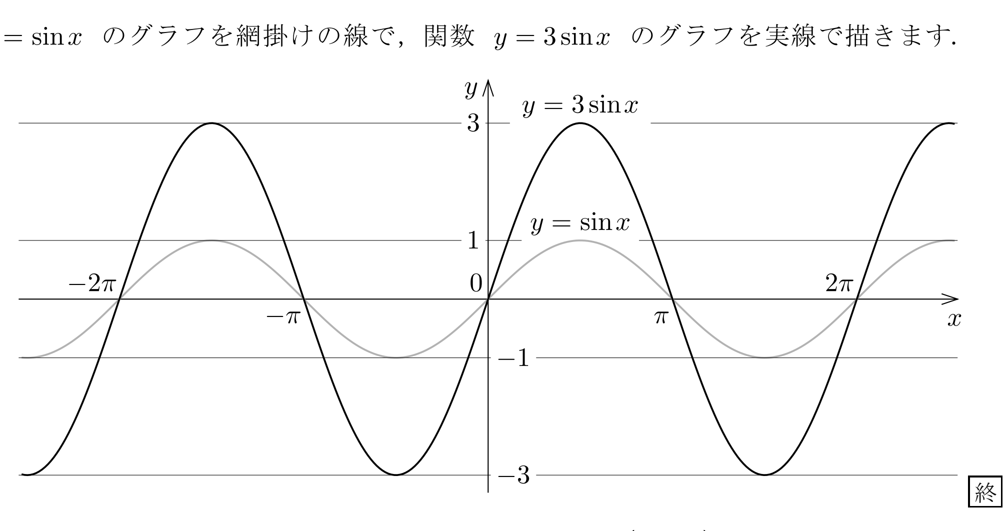
§10.6　三角関数を含む合成関数のグラフ

1次関数と三角関数との合成関数のグラフを考えます.

例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=3\sin x$ のグラフを考えます.　各実数 t に対して，関数 $y=3\sin x$ のグラフの点 $(t,3\sin t)$ は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ の y 座標だけを3倍にした点です.　よって，$y=3\sin x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフの各点の y 座標だけを3倍した点の全体です.　関数 $y=\sin x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=3\sin x$ のグラフを実線で描きます.



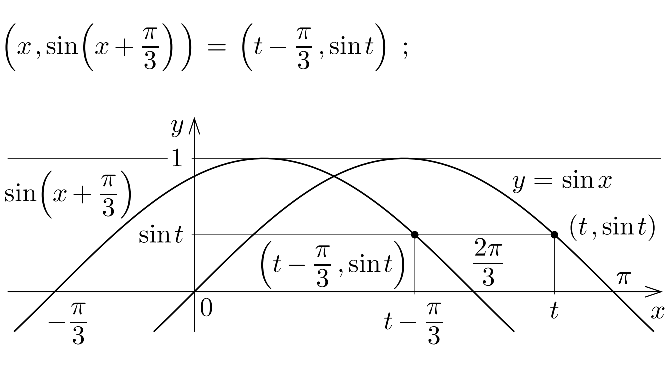


終

例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを考えます.　変数 t を $t=x+\frac{\pi}{3}$ とおきます.　このとき $t=x-\frac{\pi}{3}$.　関数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

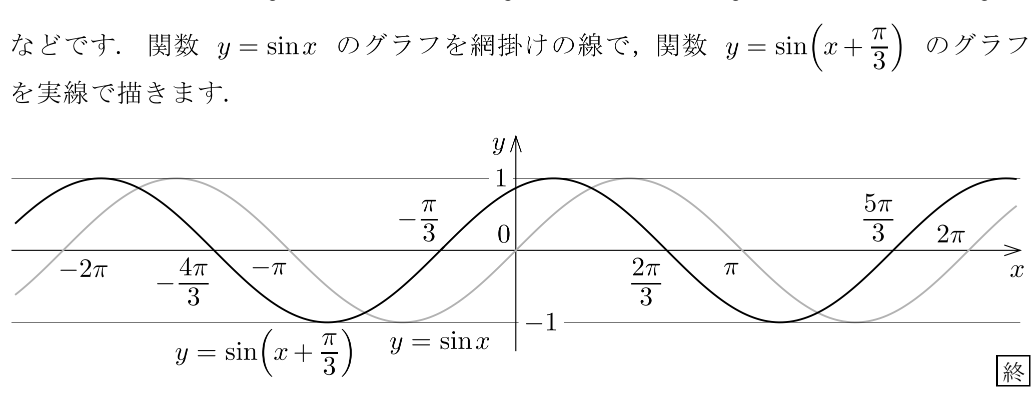
$$(x,y)=\left(x,\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(t-\frac{\pi}{3},\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた点です.　よって，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた曲線です.　関数 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ の基本周期は 2π なので，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は,



$$-\frac{\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{4\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{7\pi}{3}$$

などです.　関数 $y=\sin x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを実線で描きます.

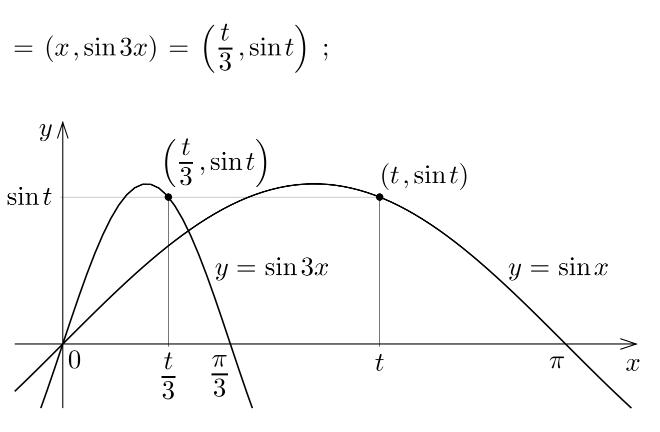


終

例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\sin 3x$ のグラフを考えます.　変数 t を $t=3x$ とおきます.　このとき $x=\frac{t}{3}$.　関数 $y=\sin 3x$ のグラフの各点 (x,y) は

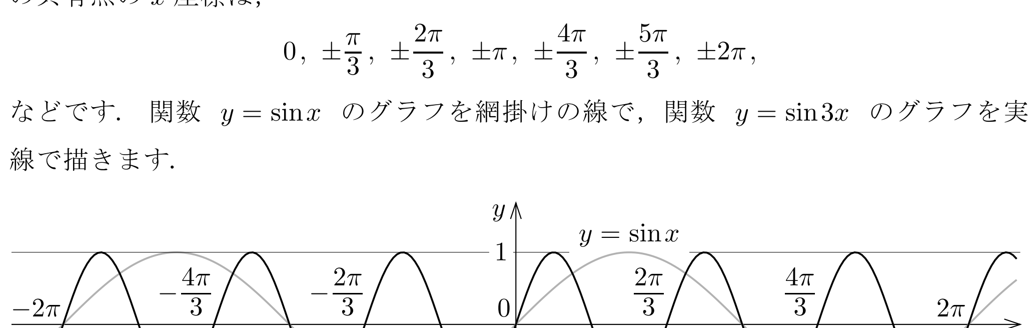
$$(x,y)=(x,\sin 3x)=\left(\frac{t}{3},\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍にした点です.　よって，$y=\sin 3x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\frac{1}{3}$ 倍した点の全体です.　関数 $\sin 3x$ の基本周期は $\frac{2\pi}{3}$ なので，$y=\sin 3x$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は,



$$0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{2\pi}{3},\ \pm\pi,\ \pm\frac{4\pi}{3},\ \pm\frac{5\pi}{3},\ \pm 2\pi,$$

などです.　関数 $y=\sin x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=\sin 3x$ のグラフを実線で描きます.



関数 $\sin 3x$ の基本周期は $\frac{2\pi}{3}$ です；これは $y=\sin 3x$ のグラフの波一つ分の長さです.

終

このように，0でない定数 a に対して，関数 $y=\sin(ax)$ のグラフは関数 $y=\sin x$ のグラフの各点の x 座標だけを $\frac{1}{a}$ 倍した点の全体です.

問題 10.6.1　xy 座標平面において，余弦関数 $y=\cos x$ のグラフと対比して以下の関数のグラフを描きなさい.

(1)　関数 $y=3\cos x$ のグラフ.

(2)　関数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフ.

(3)　関数 $y=\cos 3x$ のグラフ.

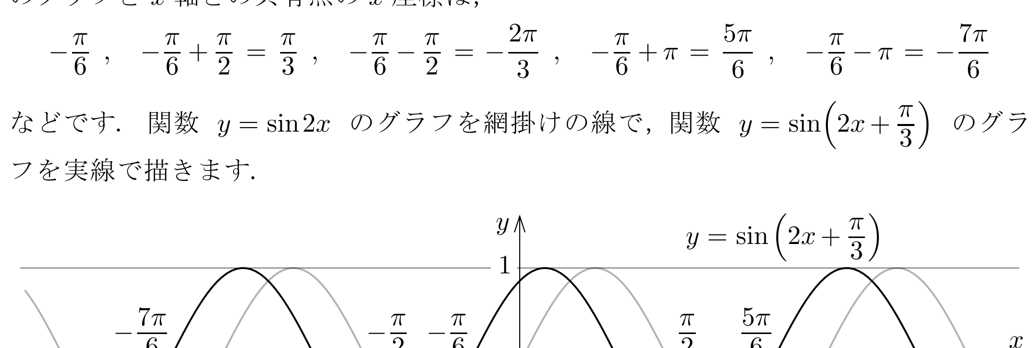
例解　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを考えます.　変数 t を $t=2x+\frac{\pi}{3}$ とおきます.　$2x=t-\frac{\pi}{3}$ なので $x=\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}$.　関数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6},\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=\sin x$ のグラフの点 $(t,\sin t)$ の x 座標だけ $\frac{1}{2}$ 倍して $-\frac{\pi}{6}$ を加えた点です.　従って，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\frac{1}{2}$ 倍した曲線である関数 $y=\sin 2x$ のグラフを x 軸の向きに $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動させた曲線です．関数 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ の基本周期は π ですから，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は,

$$-\frac{\pi}{6}\ ,\quad -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}\ ,\quad -\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{7\pi}{6}$$

などです.　関数 $y=\sin 2x$ のグラフを網掛けの線で，関数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを実線で描きます.



終

定数 r と a と b とは実数で $a\neq 0$ とします.　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=r\sin(ax+b)$ のグラフを考えます.　変数 t を $t=ax+b$ とおきます.　$ax=t-b$ なので $x=\frac{t}{a}-\frac{b}{a}$.　$y=r\sin(ax+b)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\big(x,r\sin(ax+b)\big)=\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a},r\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=r\sin x$ のグラフの点 $(t,r\sin t)$ の x 座標だけ $\frac{1}{a}$ 倍して $-\frac{b}{a}$ を加えた点です.　従って，$y=r\sin(ax+b)$ のグラフは，$y=r\sin x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\frac{1}{a}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動させた曲線です.　$ax+b=0$ とすると $x=-\frac{b}{a}$.　関数 $y=r\sin(ax+b)$ について，$x=-\frac{b}{a}$ のとき $y=r\sin 0=0$.　基本周期 $\frac{2\pi}{|a|}$ を p とおくと，$r>0$ かつ $a>0$ のとき，$y=0$ となる x の値でその近辺で単調増加であるものは

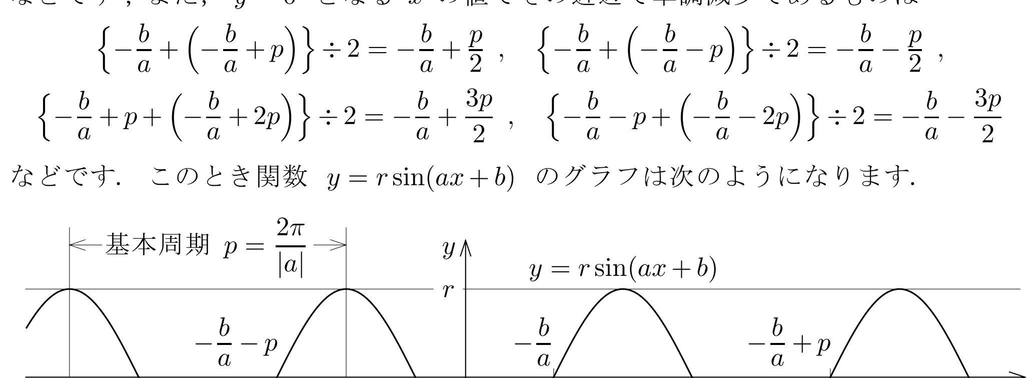
$$-\frac{b}{a}\ ,\quad -\frac{b}{a}\pm p\ ,\quad -\frac{b}{a}\pm 2p\ ,\quad -\frac{b}{a}\pm 3p\ ,$$

などです；また，$y=0$ となる x の値でその近辺で単調減少であるものは

$$\left\{-\frac{b}{a}+\left(-\frac{b}{a}+p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}+\frac{p}{2}\ ,\quad \left\{-\frac{b}{a}+\left(-\frac{b}{a}-p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}-\frac{p}{2}\ ,$$

$$\left\{-\frac{b}{a}+p+\left(-\frac{b}{a}+2p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}+\frac{3p}{2}\ ,\quad \left\{-\frac{b}{a}-p+\left(-\frac{b}{a}-2p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}-\frac{3p}{2}$$

などです.　このとき関数 $y=r\sin(ax+b)$ のグラフは次のようになります.



例題　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフの概形を描く.

〔解説〕　変数 t を $t=\frac{2x-\pi}{3}$ とおく.　$2x-\pi=3t$ ，$x=\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{2}$.　関数 $y=4\sin\frac{2x+\pi}{3}$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,4\sin\frac{2x-\pi}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{2},4\sin t\right)\ ;$$

この点は関数 $y=4\sin x$ のグラフの点 $(t,4\sin t)$ の x 座標だけ $\frac{3}{2}$ 倍して $\frac{\pi}{2}$ を加えた点である.　従って，$y=4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフは，関数 $y=4\sin x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\frac{3}{2}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動させた曲線である.

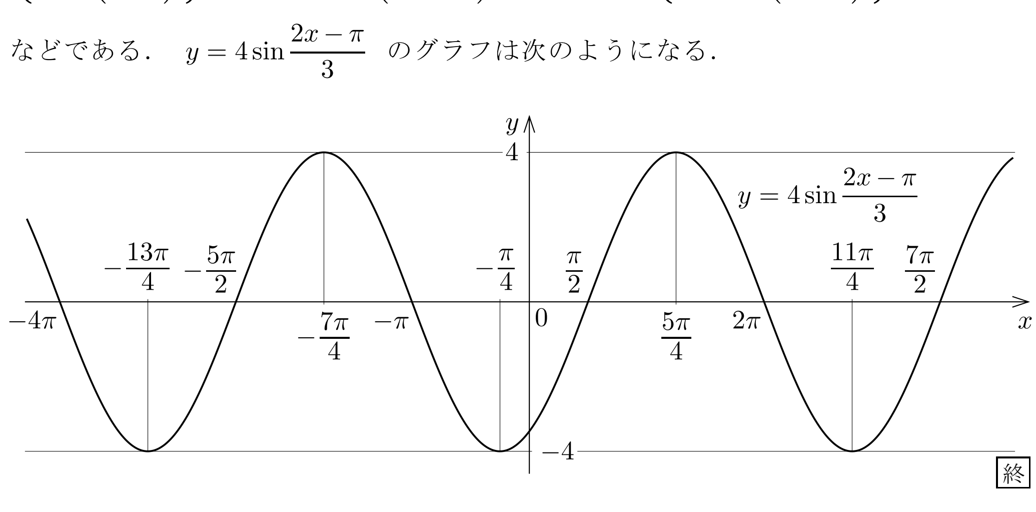
〔解答〕　$\frac{2x-\pi}{3}=0$ とすると $x=\frac{\pi}{2}$.　関数 $y=4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ について，$x=\frac{\pi}{2}$ のとき $y=4\sin 0=0$ ；基本周期は 3π なので，$y=0$ となる x の値でその近辺で単調増加であるものは

$$\frac{\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{2}+3\pi=\frac{7\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{2}-6\pi=-\frac{11\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{2}+6\pi=\frac{13\pi}{2}$$

などであり，$y=0$ となる x の値でその近辺で単調減少であるものは

$$\left\{\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right\}\div 2=-\pi\ ,\quad \left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}\right)\div 2=2\pi\ ,\quad \left\{-\frac{5\pi}{2}+\left(-\frac{11\pi}{2}\right)\right\}\div 2=-4\pi$$

などである.　$y=4\sin\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフは次のようになる.



終

問題 10.6.2　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=2\sin\frac{4x+2\pi}{3}$ のグラフの概形を描きなさい.

定数 r と a と b とは実数で $a\neq 0$ とします.　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフを考えます.　変数 t を $t=ax+b$ とおきます.　$ax=t-b$ なので $x=\frac{t}{a}-\frac{b}{a}$.　関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\big(x,r\cos(ax+b)\big)=\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a},r\cos t\right)\ ;$$

これは関数 $y=r\cos x$ のグラフの点 $(t,r\cos t)$ の x 座標だけ $\frac{1}{a}$ 倍して $-\frac{b}{a}$ を加えた点です.　従って，$y=r\cos(ax+b)$ のグラフは，$y=r\cos x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\frac{1}{a}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動させた曲線です.　$ax+b=0$ とすると $x=-\frac{b}{a}$.　関数 $y=r\cos(ax+b)$ について，$x=-\frac{b}{a}$ のとき $y=r\cos 0=r$.　基本周期 $\frac{2\pi}{|a|}$ を p とおくと，$r>0$ のとき，y が最大値 r をとるときの x の値は

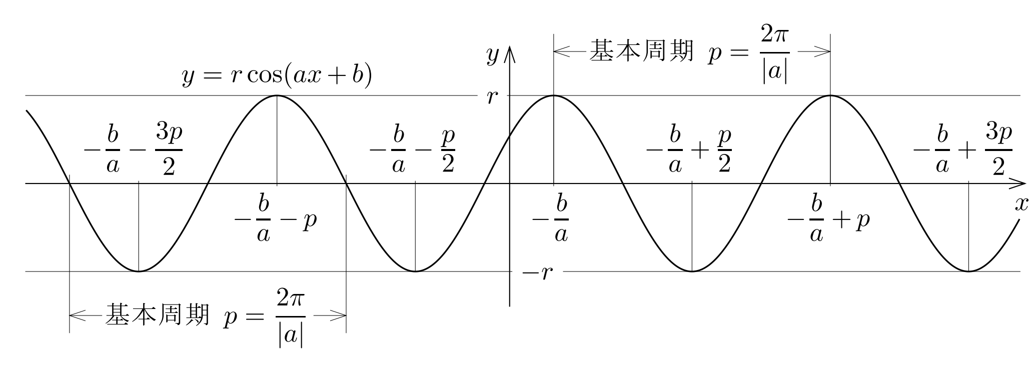
$$-\frac{b}{a}\ ,\quad -\frac{b}{a}\pm p\ ,\quad -\frac{b}{a}\pm 2p\ ,\quad -\frac{b}{a}\pm 3p\ ,$$

などです；また，y が最大値 $-r$ をとるときの x の値は

$$\left\{-\frac{b}{a}+\left(-\frac{b}{a}+p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}+\frac{p}{2}\ ,\quad \left\{-\frac{b}{a}+\left(-\frac{b}{a}-p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}-\frac{p}{2}\ ,$$

$$\left\{-\frac{b}{a}+p+\left(-\frac{b}{a}+2p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}+\frac{3p}{2}\ ,\quad \left\{-\frac{b}{a}-p+\left(-\frac{b}{a}-2p\right)\right\}\div 2=-\frac{b}{a}-\frac{3p}{2}$$

などです.　このとき関数 $y=r\cos(ax+b)$ のグラフは次のようになります.



例題　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフの概形を描く.

〔解説〕　変数 t を $t=\frac{3x+\pi}{4}$ とおく.　$3x+\pi=4t$ ，$x=\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}$.　関数 $y=2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフの各点 (x,y) は

$$(x,y)=\left(x,2\cos\frac{3x+\pi}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3},2\cos t\right)\ ;$$

これは関数 $y=2\cos x$ のグラフの点 $(t,2\cos t)$ の x 座標だけ $\frac{4}{3}$ 倍して $-\frac{\pi}{3}$ を加えた点である.　従って，$y=2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフは，関数 $y=2\cos x$ のグラフで各点の x 座標だけ $\frac{4}{3}$ 倍した曲線を x 軸の向きに $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動させた曲線である.

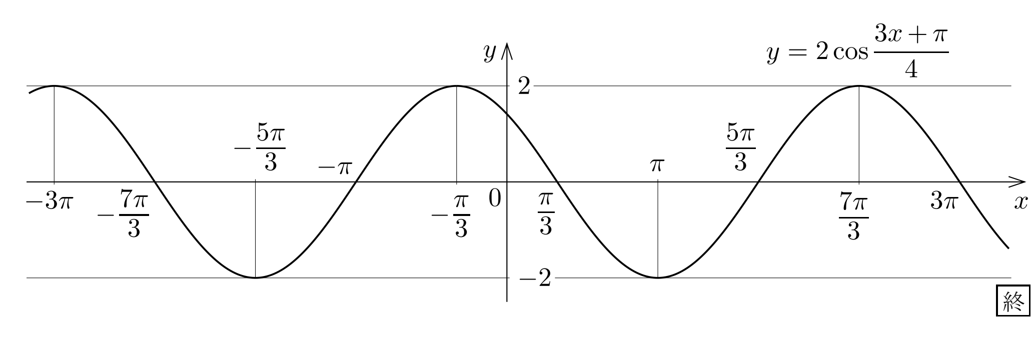
〔解答〕　$\frac{3x+\pi}{4}=0$ とすると $x=-\frac{\pi}{3}$.　関数 $y=2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ について，$x=-\frac{\pi}{3}$ のとき $y=2\cos 0=2$ ；基本周期は $\frac{8\pi}{3}$ なので，y が最大値 2 をとるときの x の値は

$$-\frac{\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}\ ,\quad -\frac{\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=-3\pi\ ,\quad -\frac{\pi}{3}+\frac{16\pi}{3}=5\pi$$

などであり，y が最小値 -2 をとるときの x の値は

$$\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{3}\right)\div 2=\pi\ ,\quad \left\{-\frac{\pi}{3}+(-3\pi)\right\}\div 2=-\frac{5\pi}{3}\ ,\quad \left(\frac{7\pi}{3}+5\pi\right)\div 2=\frac{11\pi}{3}$$

などである.　$y=2\cos\frac{3x+\pi}{4}$ のグラフは次のようになる.



終

問題 10.6.3　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=4\cos\frac{2x-\pi}{3}$ のグラフの概形を描きなさい.

例題　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\tan\frac{x-2\pi}{3}$ のグラフの概形を描く.

〔解説〕　変数 t を $t=\frac{x-2\pi}{3}$ とおく.　$x-2\pi=3t$ ，$x=3t+2\pi$.　関数 $y=\tan\frac{x-2\pi}{3}$ のグラフの各点 (x,y) は

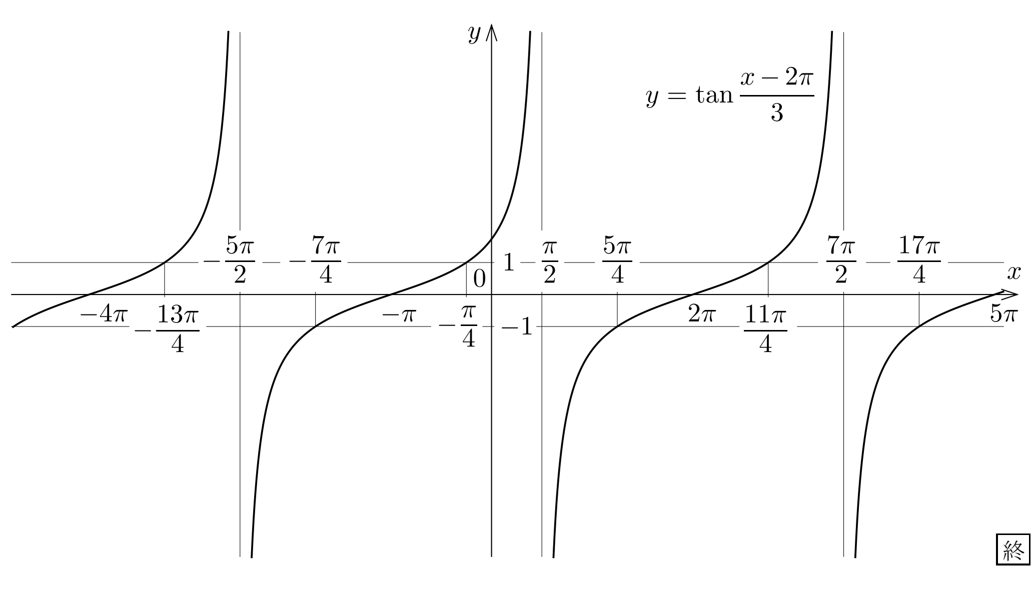
$$(x,y)=\left(x,\tan\frac{x-2\pi}{3}\right)=(3t+2\pi,\tan t)\ ;$$

これは関数 $y=\tan x$ のグラフの点 $(t,\tan t)$ の x 座標だけ 3 倍して 2π を加えた点である.　従って，$y=\tan\frac{x-2\pi}{3}$ のグラフは，関数 $y=\tan x$ のグラフで各点の x 座標だけ 3 倍した曲線を x 軸の向きに 2π だけ平行移動させた曲線である.

〔解答〕　$\frac{x-2\pi}{3}=0$ とすると $x=2\pi$.　関数 $y=\tan\frac{x-2\pi}{3}$ について，$x=2\pi$ のとき $y=\tan 0=0$.　基本周期は 3π なので，$y=0$ となる x の値は,

$$2\pi\ ,\quad 2\pi+3\pi=5\pi\ ,\quad 2\pi-3\pi=-\pi\ ,\quad 2\pi+6\pi=8\pi\ ,\quad 2\pi-6\pi=-4\pi$$

などである.　また，グラフの漸近線を表す方程式は，$x=\frac{2\pi+5\pi}{2}$ つまり $x=\frac{7\pi}{2}$ ，$x=\frac{2\pi+(-\pi)}{2}$ つまり $x=\frac{\pi}{2}$ ，$x=\frac{-4\pi+(-\pi)}{2}$ つまり $x=-\frac{5\pi}{2}$ ，などである.　$y=\tan\frac{x-2\pi}{3}$ のグラフは次のようになる.



終

問題 10.6.4　xy 座標平面において変数 x の関数 $y=\tan\frac{2x+\pi}{6}$ のグラフの概形を描きなさい.