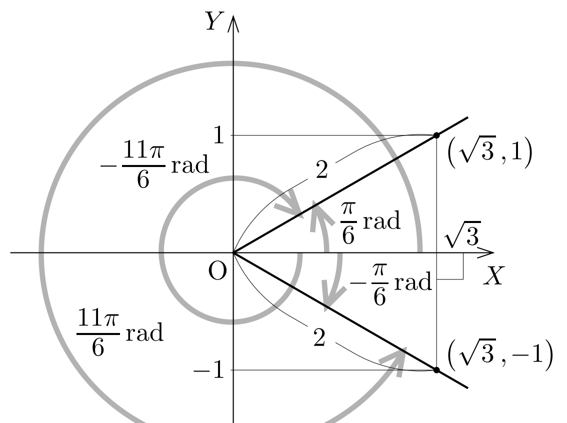
§10.7　三角関数が現れる方程式・不等式

例解　変数 x に関する方程式 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の解を，絶対値が小さい方から4個求めます．XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$（$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$）をとり，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．

$$\frac{a}{r}=\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$a:r=\sqrt{3}:2\ .$$

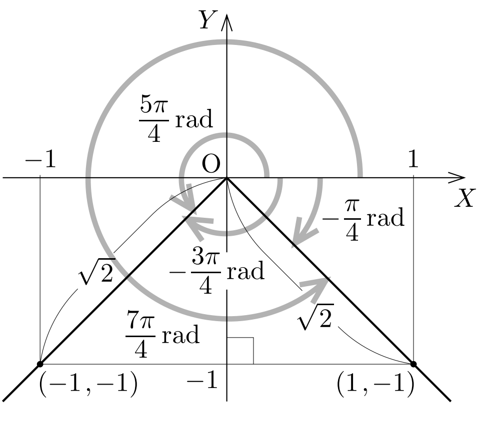


$r>0$ なので $a>0$．$r=\overline{\mathrm{OP}}=2$ のとき，$a=\sqrt{3}$，$b^2=r^2-a^2=1$ なので $b=\pm1$．始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から4個挙げると，$\dfrac{\pi}{6}$rad と $-\dfrac{\pi}{6}$rad と $\dfrac{11\pi}{6}$rad と $-\dfrac{11\pi}{6}$rad です．従って $x=\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6},-\dfrac{11\pi}{6}$．

終

例解　変数 x に関する方程式 $\sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解を，絶対値が小さい方から4個求めます．XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$（$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$）をとり，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．

$$\frac{b}{r}=\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$b:r=-1:\sqrt{2}\ .$$



$r>0$ なので $b<0$．$r=\sqrt{2}$ のとき，$b=-1$，$a^2=r^2-b^2=1$ なので $a=\pm1$．始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から4個挙げると，$-\dfrac{\pi}{4}$rad と $-\dfrac{3\pi}{4}$rad と $\dfrac{5\pi}{4}$rad と $\dfrac{7\pi}{5}$rad です．従って $x=-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{5},\dfrac{7\pi}{4}$．

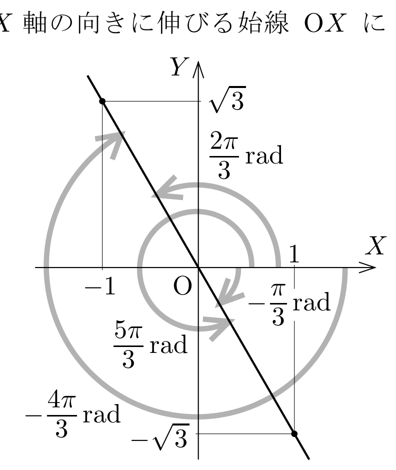
終

問題 10.7.1　変数 x に関する方程式 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の解を，絶対値が小さい方から4個求めなさい．

問題 10.7.2　変数 x に関する方程式 $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の解を，絶対値が小さい方から4個求めなさい．

例解　変数 x に関する方程式 $\tan x=-\sqrt{3}$ の解を，絶対値が小さい方から4個求めます．XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$（$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$）をとると，

$$\frac{b}{a}=\tan x=-\sqrt{3}\ ,$$
$$b=-\sqrt{3}\,a\ ,$$



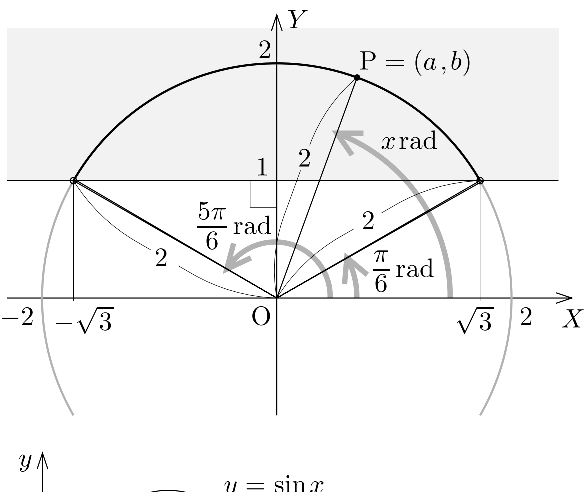
よって点 $\mathrm{P}=(a,b)$ は原点 O を通る傾きが $-\sqrt{3}$ の直線に属します．始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から4個挙げると，右図のように，$-\dfrac{\pi}{3}$rad と $\dfrac{2\pi}{3}$rad と $-\dfrac{4\pi}{3}$rad と $\dfrac{5\pi}{3}$rad です．従って $x=-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$．

終

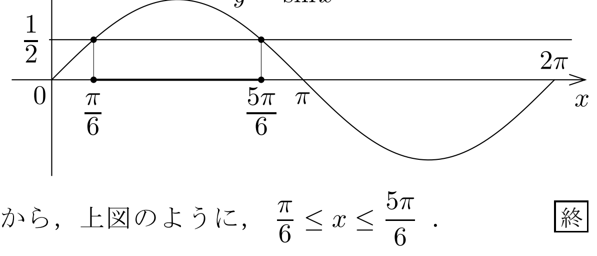
問題 10.7.3　変数 x に関する方程式 $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の解を，絶対値が小さい方から4個求めなさい．

例解　変数 x について $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x\geqq\dfrac{1}{2}$ を解きます．XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$（$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$）をとり，$r=\overline{\mathrm{OP}}>0$ とおきます．

$$\frac{b}{r}=\sin x\geqq\frac{1}{2}\ ,$$
$$b\geqq\frac{r}{2}\ .$$



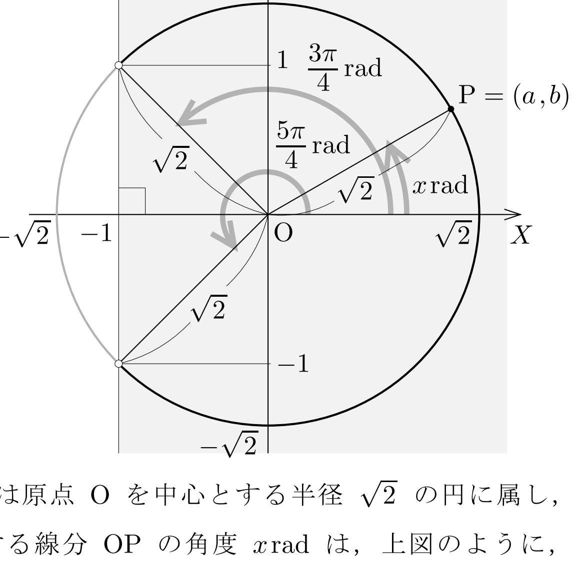
$\overline{\mathrm{OP}}=r=2$ のとき，$\mathrm{P}=(a,b)$ は原点 O を中心とする半径 2 の円に属し，$b\geqq\dfrac{r}{2}=1$．始線 OX に対する線分 OP の角度 $x\,\mathrm{rad}$ は，右図のように，$\dfrac{\pi}{6}$rad 以上 $\dfrac{5\pi}{6}$rad 以下なので，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5\pi}{6}$．このことを xy 座標平面におけるグラフで考えます．$\sin x\geqq\dfrac{1}{2}$ となる x の値の範囲は，関数 $y=\sin x$ のグラフが関数 $y=\dfrac{1}{2}$ のグラフの上側（グラフの共有点を含める）にあるような x 座標の範囲ですから，上図のように，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5\pi}{6}$．



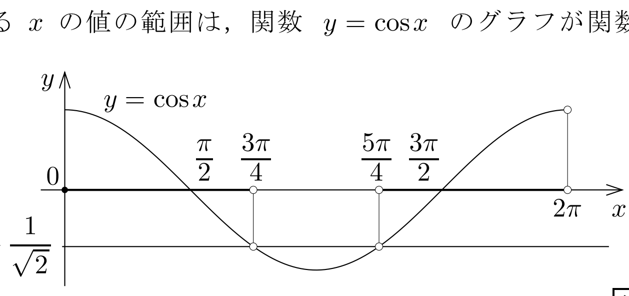
終

例解　変数 x について $0\leqq x<2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解きます．XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する角度 $x\,\mathrm{rad}$ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(a,b)$（$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$）をとり，$r=\overline{\mathrm{OP}}>0$ とおきます．

$$\frac{a}{r}=\cos x>-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$a>-\frac{r}{\sqrt{2}}\ .$$



$\overline{\mathrm{OP}}=r=\sqrt{2}$ のとき，$\mathrm{P}=(a,b)$ は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円に属し，$a\geqq-\dfrac{r}{\sqrt{2}}=-1$．始線 OX に対する線分 OP の角度 $x\,\mathrm{rad}$ は，上図のように，$0\leqq x<\dfrac{3\pi}{4}$ または $\dfrac{5\pi}{4}<x<2\pi$．このことを xy 座標平面におけるグラフで考えます．$\cos x>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる x の値の範囲は，関数 $y=\cos x$ のグラフが関数 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のグラフの上側（グラフの共有点を含めない）にあるような x 座標の範囲ですから，$0\leqq x<\dfrac{3\pi}{4}$ または $\dfrac{5\pi}{4}<x<2\pi$．



終

問題 10.7.4　変数 x について $0\leqq x<2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解きなさい．

問題 10.7.5　変数 x について $0\leqq x<2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x\geqq\dfrac{1}{2}$ を解きなさい．

問題 10.7.6　変数 x について $-\pi<x\leqq\pi$ の範囲で不等式 $\sin x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい．