§ 10.7　三角関数の相互関係

簡便のため，例えば，$(\sin x)^2$ を $\sin^2 x$ のように，$(\cos t)^3$ を $\cos^3 t$ のように書き表します：

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \ , \qquad \cos^3 t = (\cos t)^3 \ .$$

$\sin^2 x = (\sin x)^2$ と $\sin x^2 = \sin(x^2)$ とは通常は等しくありません．

任意の実数 x について，定理 6.4.2 より

$$\{\sin(x\,\mathrm{rad})\}^2 + \{\cos(x\,\mathrm{rad})\}^2 = 1 \ ;$$

$\sin(x\,\mathrm{rad}) = \sin x$ ，$\cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x$ なので，$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ ．

定理 10.7.1　任意の実数 x について

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ .$$

任意の実数 x について，定理 6.4.3 より，角度 $x\,\mathrm{rad}$ が角度 $90° = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{rad}$ の奇数倍でないとき

$$1 + \{\tan(x\,\mathrm{rad})\}^2 = \frac{1}{\{\cos(x\,\mathrm{rad})\}^2} \ ;$$

$\tan(x\,\mathrm{rad}) = \tan x$ ，$\cos(x\,\mathrm{rad}) = \cos x$ なので，x が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき

$$1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2} \ .$$

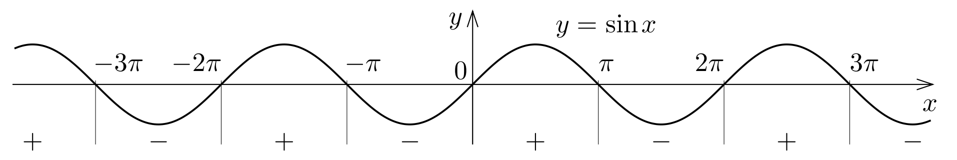
更にこのとき，$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ なので $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ ．

定理 10.7.2　任意の実数 x について，x が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

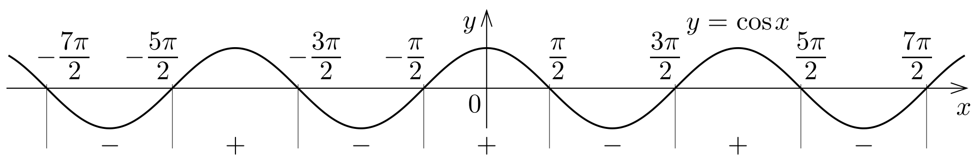
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \ .$$

定理 10.2.2，定理 10.7.1，定理 10.7.2 を用いると，$\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\tan^2 x$ のうちの一つの値が分かると他の 2 つの値も分かります．

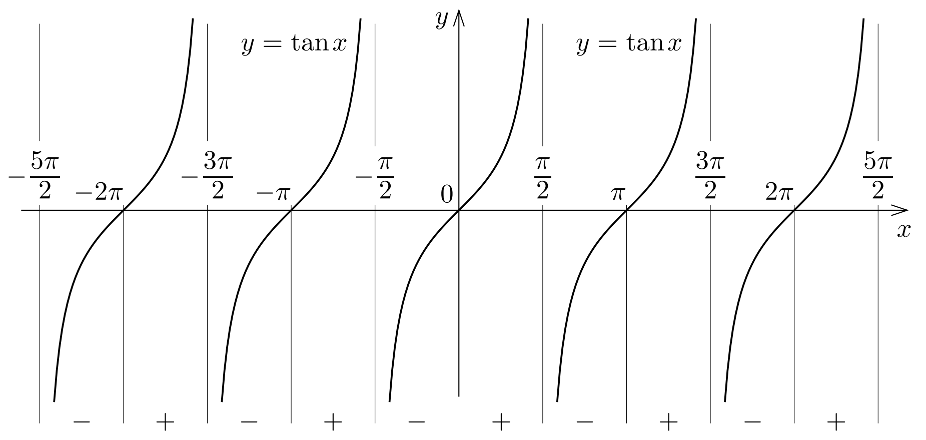
関数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ のグラフよりそれらの値の符号は次のようになります．



正弦関数 $y = \sin x$ の値の符号



余弦関数 $y = \cos x$ の値の符号



正接関数 $y = \tan x$ の値の符号

$\boxed{\text{例題}}$　実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \dfrac{3}{5}$ とする．$\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求める．

〔解説〕 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\cos x = \dfrac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \ .$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \ .$$

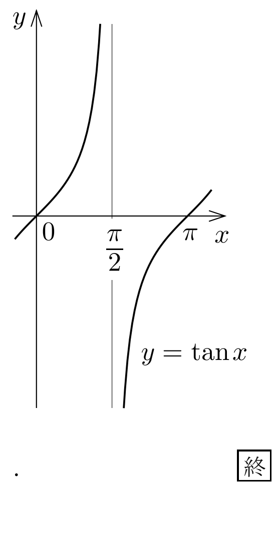
更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\dfrac{4}{5}}{\dfrac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.7.1}}$　実数 x について $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ とします．$\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　実数 x について $0 \leq x \leq \pi$ かつ $\tan x = -2$ とする．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求める．



〔解説〕 $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ なので，$\tan x = -2$ より

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \ ,$$

$0 \leq x \leq \pi$ かつ $\tan x < 0$ より $\dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi$ なので，$\cos x \leq 0$ ．従って

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

更に $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ より

$$\sin x = \tan x \cos x = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.7.2}}$　実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = \dfrac{5}{3}$ とします．$\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　実数 x について $-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\sin x = \dfrac{2}{3}\cos x$ とする．$\cos x$ の値を求める．

〔解説〕 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，$\sin x = \dfrac{2}{3}\cos x$ より，

$$\left(\frac{2}{3}\cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1 \ ,$$

$$\frac{13}{9}\cos^2 x = 1 \ ,$$

$$\cos^2 x = \frac{9}{13} \ ;$$

$-\pi \leq x \leq 0$ より $\sin x \leq 0$ なので $\dfrac{2}{3}\cos x \leq 0$ ，よって $\cos x \leq 0$ なので，

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.7.3}}$　実数 t について $\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}$ かつ $\cos t = \dfrac{3}{4}\sin t$ とします．$\sin t$ の値を求めなさい．