

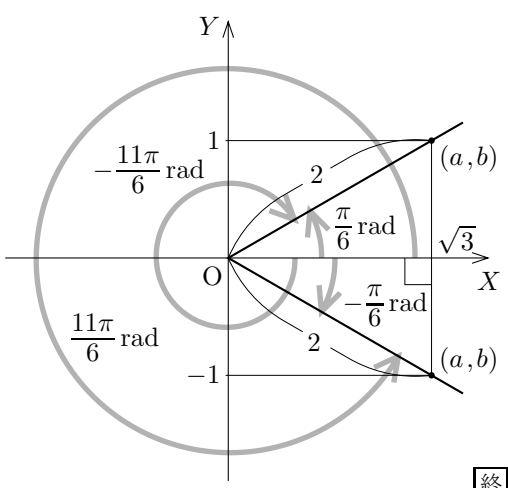
§10.8 三角関数が現れる方程式・不等式

例解 変数 x に関する方程式 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の解を、絶対値が小さい方から4個求めます。XY座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属す点 $P = (a, b)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおきます。

$$\frac{a}{r} = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a : r = \sqrt{3} : 2.$$

$r > 0$ なので $a > 0$. $r = \overline{OP} = 2$ のとき、 $a = \sqrt{3}$, $b^2 = r^2 - a^2 = 1$ なので $b = \pm 1$. 始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から4個挙げると、 $\frac{\pi}{6}$ rad と $-\frac{\pi}{6}$ rad と $\frac{11\pi}{6}$ rad と $-\frac{11\pi}{6}$ rad です。従って $x = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$.



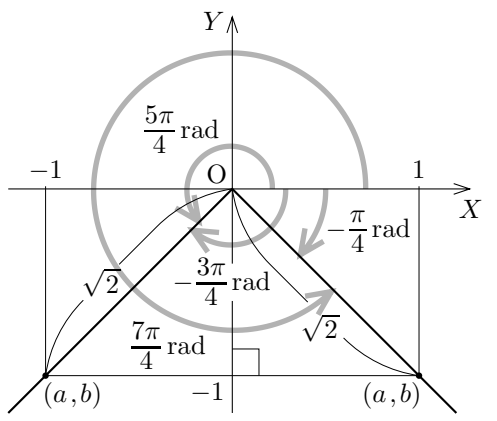
終

例解 変数 x に関する方程式 $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の解を、絶対値が小さい方から4個求めます。XY座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属す点 $P = (a, b)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおきます。

$$\frac{b}{r} = \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$b : r = -1 : \sqrt{2}.$$

$r > 0$ なので $b < 0$. $r = \sqrt{2}$ のとき、 $b = -1$, $a^2 = r^2 - b^2 = 1$ なので $a = \pm 1$. 始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から4個挙げると、 $-\frac{\pi}{4}$ rad と $-\frac{3\pi}{4}$ rad と $\frac{5\pi}{4}$ rad と $\frac{7\pi}{4}$ rad です。従って $x = -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.



終

問題 10.8.1 変数 x に関する方程式 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の解を、絶対値が小さい方から4個求めなさい。

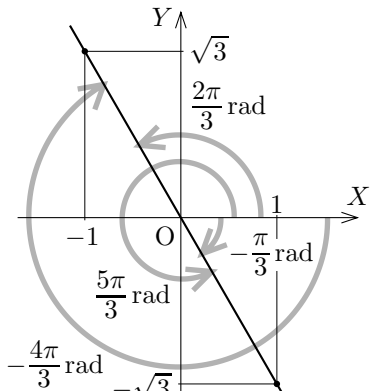
問題 10.8.2 変数 x に関する方程式 $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の解を、絶対値が小さい方から4個求めなさい。

例解 変数 x に関する方程式 $\tan x = -\sqrt{3}$ の解を、絶対値が小さい方から4個求めます。XY座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属す点 $P = (a, b)$ ($P \neq O$) をとると、

$$\frac{b}{a} = \tan x = -\sqrt{3},$$

$$b = -\sqrt{3}a,$$

よって点 $P = (a, b)$ は原点 O を通る傾きが $-\sqrt{3}$ の直線に属します。始線 OX に対する線分 OP の角度を絶対値が小さい方から4個挙げると、右図のように、 $-\frac{\pi}{3}$ rad と $\frac{2\pi}{3}$ rad



と $-\frac{4\pi}{3}$ rad と $\frac{5\pi}{3}$ rad です。従って $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

終

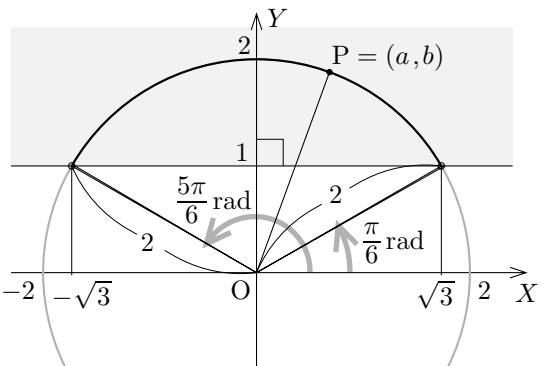
問題 10.8.3 変数 x に関する方程式 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ の解を、絶対値が小さい方から4個求めなさい。

例解 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ を解きます。XY座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属す点 $P = (a, b)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP} > 0$ とおきます。

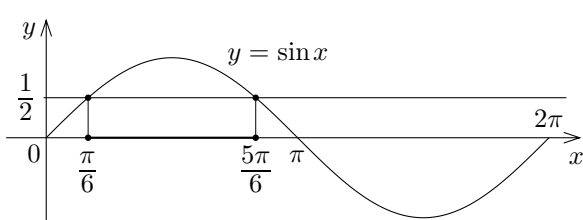
$$\frac{b}{r} = \sin x \geq \frac{1}{2},$$

$$b \geq \frac{r}{2}.$$

$\overline{OP} = r = 2$ のとき、 $P = (a, b)$ は原点 O を中心とする半径 2 の円に属し、 $b \geq \frac{r}{2} = 1$. 始線 OX に対する線分 OP の角度 x rad は、右図のように、 $\frac{\pi}{6}$ rad 以上 $\frac{5\pi}{6}$ rad



以下なので、 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. このことを xy 座標平面におけるグラフで考えてみます。 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ となる x の値の範囲は、関数 $y = \sin x$ のグラフが関数 $y = \frac{1}{2}$ のグラフの上側 (グラフの共有点を含める) にあるような x 座標の範囲ですから、上図のように、 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.



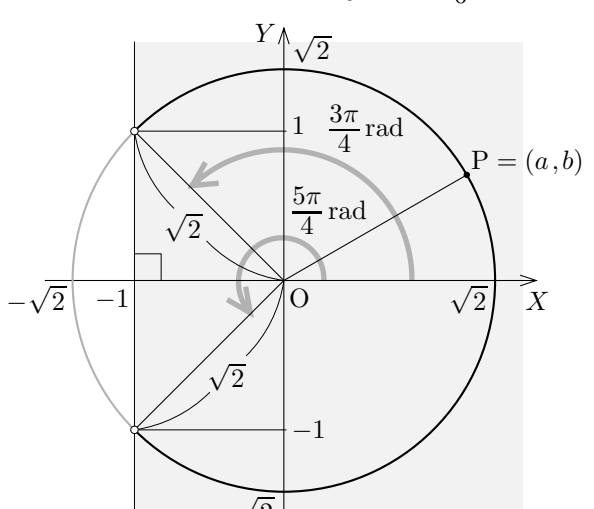
終

例解 変数 x に関する不等式 $\cos x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で解きます。XY座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する角度 x rad の動径に属す点 $P = (a, b)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP} > 0$ とおきます。

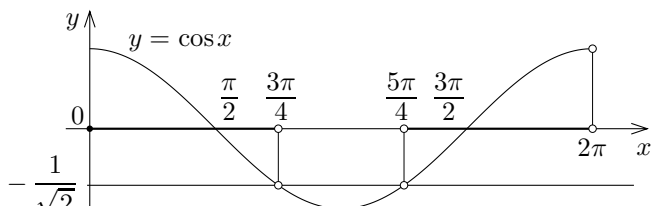
$$\frac{a}{r} = \cos x > -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a > -\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

$\overline{OP} = r = \sqrt{2}$ のとき、 $P = (a, b)$ は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円に属し、 $a > -\frac{r}{\sqrt{2}} = -1$. 始線 OX に対する線分 OP の角度 x rad は、前図のように、 $0 \leq x < \frac{3\pi}{4}$ 及び $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$. このことを xy 座標平面におけるグラフで考えてみます。 $\cos x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる x の値の範囲は、関数 $y = \cos x$ のグラフが関数 $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のグラフの上側 (グラフの共有点を含めない) にあるような x 座標の範囲ですから、 $0 \leq x < \frac{3\pi}{4}$ または $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$.



または $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$.



終

問題 10.8.4 変数 x について $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を解きなさい。

問題 10.8.5 変数 x について $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ を解きなさい。

問題 10.8.6 変数 x について $-\pi < x \leq \pi$ の範囲で不等式 $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解きなさい。