

§10.8 三角関数の相互関係

例えば、 $(\sin x)^2$ を $\sin^2 x$ のように、 $(\cos t)^3$ を $\cos^3 t$ のように略します：

$$\sin^2 x = (\sin x)^2, \quad \cos^3 t = (\cos t)^3.$$

$\sin^2 x = (\sin x)^2$ と $\sin x^2 = \sin(x^2)$ とは違います。また、このような略記法が使われるのは $\sin x$ や $\cos t$ などの累乗の指数が正の整数のときに限ります。 $(\sin x)^{-2}$ を $\sin^{-2} x$ と略すようなことはしません。

任意の実数 x について、定理 6.4.2 より

$$\{\sin(x \text{ rad})\}^2 + \{\cos(x \text{ rad})\}^2 = 1;$$

$\sin(x \text{ rad}) = \sin x$, $\cos(x \text{ rad}) = \cos x$ なので、 $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

定理 10.8.1 任意の実数 x について

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

定理 6.4.3 を思い起こして下さい：一般角 θ が角度 $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ の奇数倍でないならば $1 + (\tan \theta)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$. 実数 x について、一般角 $x \text{ rad}$ が角度 $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ の奇数倍でないとき、つまり x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$1 + \{\tan(x \text{ rad})\}^2 = \frac{1}{\{\cos(x \text{ rad})\}^2},$$

$\tan(x \text{ rad}) = \tan x$, $\cos(x \text{ rad}) = \cos x$ なので

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

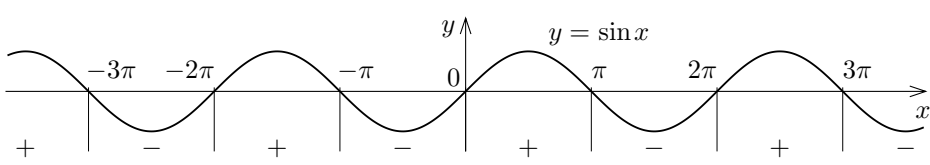
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ なので $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

定理 10.8.2 任意の実数 x について、

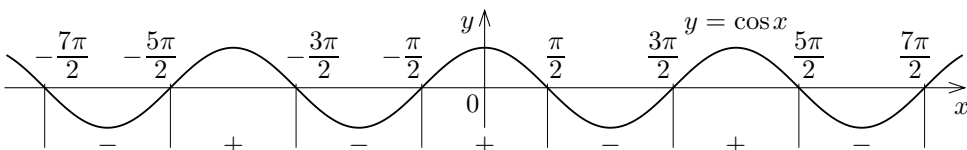
$$x \text{ が } \frac{\pi}{2} \text{ の奇数倍でないとき } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

定理 10.2.2, 定理 10.8.1, 定理 10.8.2 を用いると、 $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan^2 x$ のうちの 1 個の値が分かると他の 2 個の値も分かります。

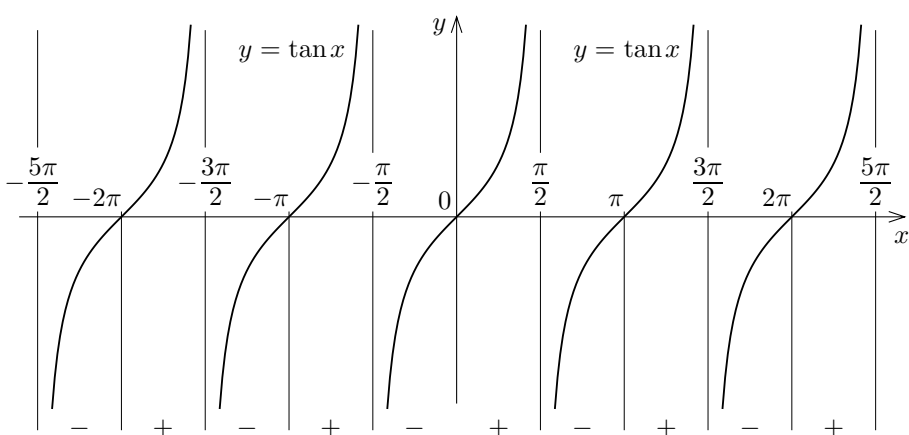
関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ のグラフよりそれらの値の符号は次のようになります。



正弦関数 $y = \sin x$ の値の符号



余弦関数 $y = \cos x$ の値の符号



正接関数 $y = \tan x$ の値の符号

例題 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\cos x = \frac{3}{5}$ とする。 $\sin x$ の値と $\tan x$ の値とを求めよ。

【解説】 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので、 $\cos x = \frac{3}{5}$ より

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので、

$$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

更に

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

終

問題 10.8.1 実数 x について $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin x = -\frac{2}{3}$ とします。 $\cos x$ の値と $\tan x$ の値とを求めなさい。

例題 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = -2$ とする。 $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めよ。

【解説】 $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なので、 $\tan x = -2$ より

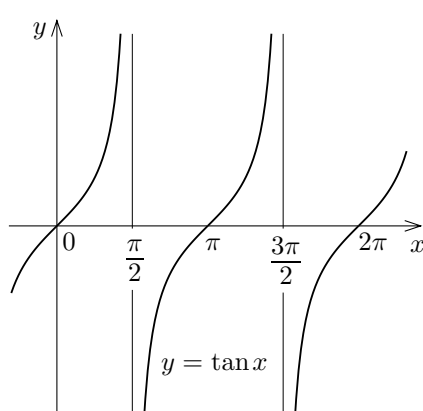
$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5},$$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x < 0$ なので $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, よって $\cos x > 0$ なので、

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

更に $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ より

$$\begin{aligned} \sin x &= \tan x \cos x = (-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$



終

問題 10.8.2 実数 x について $\pi \leq x \leq 2\pi$ かつ $\tan x = \frac{5}{3}$ とします。 $\sin x$ の値と $\cos x$ の値とを求めなさい。

例題 実数 x について $-\pi \leq x \leq 0$ かつ $\sin x = \frac{2}{3} \cos x$ とする。 $\cos x$ の値を求めよ。

【解説】 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので、 $\sin x = \frac{2}{3} \cos x$ より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} \cos x\right)^2 + \cos^2 x &= 1, \\ \frac{13}{9} \cos^2 x &= 1, \\ \cos^2 x &= \frac{9}{13}; \end{aligned}$$

$-\pi \leq x \leq 0$ より $\sin x \leq 0$ なので $\frac{2}{3} \cos x \leq 0$, よって $\cos x \leq 0$ なので、

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

終

問題 10.8.3 実数 t について $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ かつ $\cos t = \frac{3}{4} \sin t$ とします。 $\sin t$ の値を求めなさい。