§10.9 三角関数の諸公式

任意の実数 a,b について，6.5節で述べた正弦の加法定理より，

$$\sin(a\,\mathrm{rad}+b\,\mathrm{rad}) = \sin(a\,\mathrm{rad})\cos(b\,\mathrm{rad})+\cos(a\,\mathrm{rad})\sin(b\,\mathrm{rad})\ ;$$

この等式において，$\sin(a\,\mathrm{rad}+b\,\mathrm{rad})=\sin\{(a+b)\mathrm{rad}\}=\sin(a+b)$ ，$\sin(a\,\mathrm{rad})=\sin a$ ，$\cos(a\,\mathrm{rad})=\cos a$ ，$\sin(b\,\mathrm{rad})=\sin b$ ，$\cos(b\,\mathrm{rad})=\cos b$ なので，

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b\ .$$

このようにして三角関数の加法定理が導かれます．

定理（正弦関数・余弦関数の加法定理）　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b \quad（複号同順），$$
$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b \quad（複号同順）．$$

定理（正接関数の加法定理）　実数 a と b とについて，$\tan a$ ，$\tan b$ ，及び $\tan(a+b)$ または $\tan(a-b)$ の値が存在するとき，

$$\tan(a\pm b) = \frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b} \quad（複号同順）．$$

$\boxed{\text{例題}}$　実数 x について $3\pi\leq x\leq 4\pi$ ，$\cos x=\frac{3}{4}$ とする．また，実数 y について $\frac{3\pi}{2}\leq y\leq\frac{5\pi}{2}$ ，$\sin y=-\frac{1}{3}$ とする．次の式の値を求める：$\sin(x+y)$ ，$\cos(x+y)$ ．

〔解説〕 $\sin^2x+\cos^2x=1$ より

$$\sin^2x = 1-\cos^2x = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}\ ,$$

$3\pi\leq x\leq 4\pi$ より $\sin x\leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

また，$\sin^2y+\cos^2y=1$ より

$$\cos^2y = 1-\sin^2y = 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}\ ,$$

$\frac{3\pi}{2}\leq y\leq\frac{5\pi}{2}$ より $\cos x\geq 0$ なので，

$$\cos x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

正弦関数の加法定理より，

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=-\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{14}}{6}-\frac{1}{4}\ .$$

余弦関数の加法定理より，

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{3}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3}+\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{12}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 10.9.1}}$　実数 a について $\frac{5\pi}{2}\leq a\leq\frac{7\pi}{2}$ ，$\sin a=\frac{5}{6}$ とします．また，実数 b について $2\pi\leq b\leq 3\pi$ ，$\cos b=-\frac{2}{3}$ とします．次の式の値を求めなさい：$\sin(a+b)$ ，$\cos(a+b)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　実数 a について $\tan a=3$ であり，実数 b について $\tan b=7$ であるとする．次の式の値を求める：$\tan(a+b)$ ，$\tan(a-b)$ ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{3+7}{1-3\cdot 7}=\frac{10}{-20}=-\frac{1}{2}\ .$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}=\frac{3-7}{1+3\cdot 7}=\frac{-4}{22}=-\frac{2}{11}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 10.9.2}}$　実数 x について $\tan x=\frac{2}{7}$ であり，実数 y について $\tan y=3$ であるとします．次の式の値を求めなさい：$\tan(x+y)$ ，$\tan(x-y)$ ．

加法定理を基にしていくつかの公式を導きます．以下の公式については公式そのものよりもその導き方を覚えて下さい．

実数 a,b について，正弦関数の加法定理の等式 $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ において $b=a$ とすると，

$$\sin(a+a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a\ ,$$
$$\sin 2a=2\sin a\cos a\ .$$

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ において $b=a$ とすると，

$$\cos(a+a)=\cos a\cos a-\sin a\sin a\ ,$$
$$\cos 2a=\cos^2a-\sin^2a\ .$$

更に，$\sin^2a+\cos^2a=1$ より $\sin^2a=1-\cos^2a$ なので，

$$\cos^2a-\sin^2a = \cos^2a-(1-\cos^2a) = 2\cos^2a-1\ ,$$

また，$\sin^2a+\cos^2a=1$ より $\cos^2a=1-\sin^2a$ なので，

$$\cos^2a-\sin^2a = 1-\sin^2a-\sin^2a = 1-2\sin^2a\ ,$$

故に

$$\cos 2a = \cos^2a-\sin^2a = 2\cos^2a-1 = 1-2\sin^2a\ .$$

正接関数の加法定理 $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ において $b=a$ とすると

$$\tan(a+a)=\frac{\tan a+\tan a}{1-\tan a\tan a}\ ,$$
$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2a}\ .$$

こうして次の定理が導かれます．

定理 10.9.1　任意の実数 a について，

$$\sin 2a=2\sin a\cos a\ ,$$
$$\cos 2a=\cos^2a-\sin^2a=2\cos^2a-1=1-2\sin^2a\ ,$$

$\cos a\neq 0$ ，$\tan^2a\neq 1$ のとき

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2a}\ .$$

実数 a について，定理 10.9.1 より $\cos 2a=1-2\sin^2a$ なので，

$$2\sin^2a=1-\cos 2a\ ,$$
$$\sin^2a=\frac{1-\cos 2a}{2}\ .$$

また，定理 10.9.1 より $\cos 2a=2\cos^2a-1$ なので，

$$2\cos^2a=1+\cos 2a\ ,$$
$$\cos^2a=\frac{1+\cos 2a}{2}\ .$$

更に $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}$ より，

$$\tan^2a = \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2 = \frac{\sin^2a}{\cos^2a} = \frac{\frac{1-\cos 2a}{2}}{\frac{1+\cos 2a}{2}} = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\ .$$

定理 10.9.2　任意の実数 a について，

$$\sin^2a = \frac{1-\cos 2a}{2}\ ,\qquad \cos^2a = \frac{1+\cos 2a}{2}\ ,$$

$\cos 2a\neq -1$ のとき

$$\tan^2a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\ .$$

実数 a,b について，余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ と $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足し算します：

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ + & \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b} \end{array}$$

よって

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}\ .$$

等式 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ と $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ とを左辺どうし右辺どうし引き算します：

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ - & \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\sin b} \end{array}$$

よって

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b)-\cos(a-b)\}\ .$$

正弦関数の加法定理の等式 $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ と $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足し算します：

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ + & \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b} \end{array}$$

よって

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}\ .$$

こうして次の定理が導かれます．

定理 10.9.3　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\{\cos(a+b)-\cos(a-b)\}\ ,$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}\ ,$$
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を変数 x の1次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する：$\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ ．

定理 10.9.3 の公式 $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}$ を用いる．

$$\cos(3x+2)\cos(5x-7)=\frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\}+\cos\{(3x+2)-(5x-7)\}]$$
$$=\frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(-2x+9)\}\ ,$$

ここで $\cos(-2x+9)=\cos\{-(2x-9)\}=\cos(2x-9)$ なので，

$$\cos(3x+2)\cos(5x-7)=\frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(2x-9)\}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 10.9.3}}$　以下の式を変数 x の1次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形しなさい．

(1) $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ ．　　(2) $\sin(3x-5)\sin(6x-1)$ ．

実数 a,b について，

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a\ ,\qquad \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b\ ;$$

つまり，

$$a = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\ ,\qquad b = \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より，

$$\sin a=\sin\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)=\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\sin b=\sin\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ;$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算および引き算します：

$$\sin a+\sin b=\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\sin a-\sin b=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}-\left(-\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right)=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より，

$$\cos a=\cos\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)=\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\cos b=\cos\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ;$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算および引き算します：

$$\cos a+\cos b=\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\cos a-\cos b=-\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}-\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

こうして次の定理が導かれます．

定理 10.9.4　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ ,$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　次の式を変数 x の1次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する：$\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ ．

定理 10.9.4 の公式 $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ を用いる．

$$\sin(2x-5)-\sin(7x+4)=2\cos\frac{2x-5+7x+4}{2}\sin\frac{2x-5-(7x+4)}{2}$$
$$=2\cos\frac{9x-1}{2}\sin\frac{-5x-9}{2}\ .$$

ここで $\sin\frac{-5x-9}{2}=\sin\left(-\frac{5x+9}{2}\right)=-\sin\frac{5x+9}{2}$ なので，

$$\sin(2x-5)-\sin(7x+4)=-2\sin\frac{5x+9}{2}\cos\frac{9x-1}{2}\ .$$

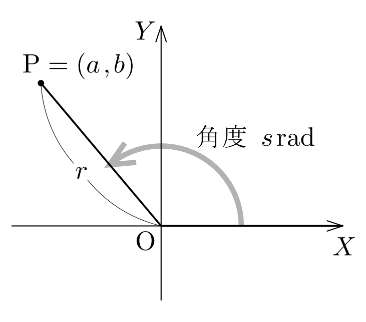
$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 10.9.4}}$　以下の式を変数 x の1次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形しなさい．

(1) $\sin(3x-7)+\sin(4x-2)$ ．　　(2) $\cos(2x+3)-\cos(5x+6)$ ．

実数 a と b とについて $a\neq 0$ または $b\neq 0$ とします．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおきます．$a\neq 0$ または $b\neq 0$ なので，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ，よって $r>0$ ．三角関数の定義より $\cos s=\frac{a}{r}$ ，$\sin s=\frac{b}{r}$ なので，

$$a = r\cos s\ ,\qquad b = r\sin s\ .$$



よって，各実数 x に対して，

$$a\sin x+b\cos x = r\cos s\sin x+r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s+\cos x\sin s)\ ;$$

加法定理より $\sin x\cos s+\cos x\sin s=\sin(x+s)$ なので，

$$a\sin x+b\cos x = r\sin(x+s)\ ;$$

$\mathrm{O}=(0,0)$ ，$\mathrm{P}=(a,b)$ より $r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$ なので，

$$a\sin x+b\cos x = r\sin(x+s) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+s)\ .$$

こうして次の定理が導かれます．

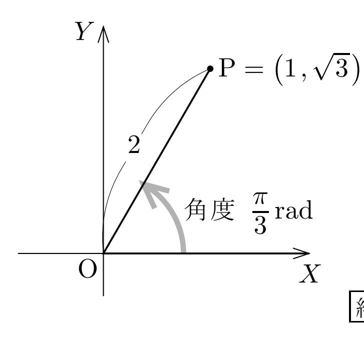
定理 10.9.5　実数 a と b とについて，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\,\mathrm{rad}$（s は実数）とする．このとき，任意の実数 x について

$$a\sin x+b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+s)\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　次のような実数 r,s を一組求める：任意の実数 x について $\sin x+\sqrt{3}\cos x=r\sin(x+s)$ ．

〔解説〕 XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=\left(1,\sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに延びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\frac{\pi}{3}\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^{\,2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ .$$



故に，$r=2$ ，$s=\frac{\pi}{3}$ とすればよい．$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問題 10.9.5}}$　以下のような実数 r,s を一組求めなさい：任意の実数 x について $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=r\sin(x+s)$ ．

$\boxed{\text{問題 10.9.6}}$　以下のような実数 r,s を一組求めなさい：任意の実数 x について $3\sin x-3\cos x=r\sin(x+s)$ ．