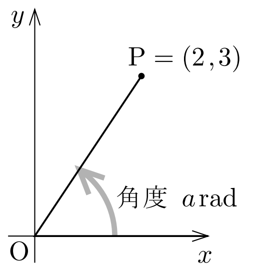
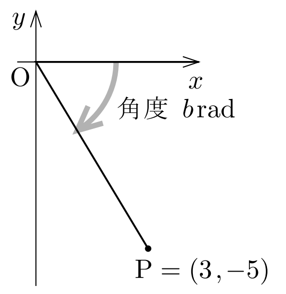
第10章の補遺3　逆三角関数の利用



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における点 P $=(2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（a は実数）とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする． 逆正接関数を用いて a の値を表す．

$\tan a = \dfrac{3}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ． 点 P の x 座標が正なので， $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$ ． 故に $a = \tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ．

$\boxed{\text{終}}$



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における点 P $=(3,-5)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおく． $-\pi < b \leq \pi$ とする． 逆正接関数を用いて b の値を表す．

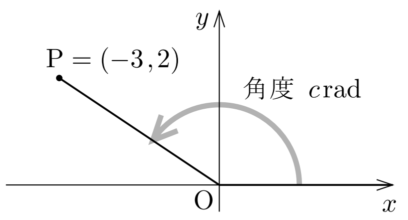
$\tan b = -\dfrac{5}{3}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3}\ ,$$

点 P の x 座標が正なので， $-\dfrac{\pi}{2} < b < \dfrac{\pi}{2}$ ， よって $\tan^{-1}(\tan b) = b$ ． 故に $b = -\tan^{-1}\dfrac{5}{3}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.1}}$　xy 座標平面における点 P $=(5,-7)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a$rad（a は実数）とおきます． $-\pi < a \leq \pi$ とします． 逆正接関数を用いて a の値を表しなさい．



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における点 P $=(-3,2)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c$rad（c は実数）とおく． $-\pi < c \leq \pi$ とする． 逆正接関数を用いて c の値を表す．

〔注意〕 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の基本周期は π なので $\tan c = \tan(c-\pi)$ ．

〔解答〕 $\tan c = -\dfrac{3}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}\ .$$

$\dfrac{\pi}{2} < c < \dfrac{3\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} < c-\pi < \dfrac{\pi}{2}$ ，よって

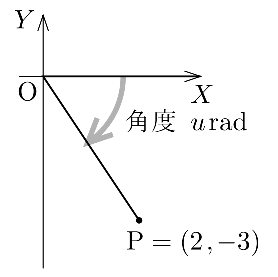
$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c-\pi)\} = c-\pi\ .$$

従って $c-\pi = -\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ なので， $c = \pi - \tan^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.2}}$　xy 座標平面における点 P $=(-4,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに延びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b$rad（b は実数）とおきます． $-\pi < b \leq \pi$ とします． 逆正接関数を用いて b の値を表しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　次のような実数 r, s の組を一つ求める： 任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．



〔解説〕 XY 座標平面における点 P $=(2,-3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい． 定理10.9.5より，任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2+(-3)^2}\sin(x+u) \\ &= \sqrt{13}\sin(x+u)\ . \end{aligned}$$

$\tan u = -\dfrac{3}{2}$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ． よって $u = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ ． 任意の実数 x について

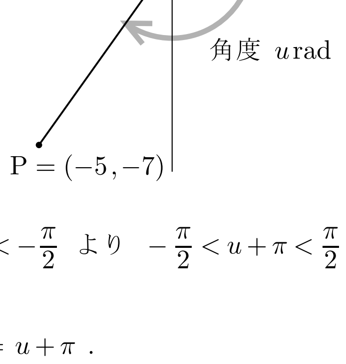
$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right)\ .$$

$r = \sqrt{13}$ かつ $s = -\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ とすればよい．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.3}}$　次のような実数 r, s の組を一つ求めなさい：任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次のような実数 r, s の組を一つ求める： 任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$ ．



XY 座標平面における点 P $=(-5,-7)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに延びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u$rad（u は実数）とおく． $-\dfrac{3\pi}{2} < u < -\dfrac{\pi}{2}$ としてよい． 定理10.9.5より，任意の実数 x について

$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2+(-7)^2}\sin(x+u) \\ &= \sqrt{74}\sin(x+u)\ . \end{aligned}$$

$\tan u = \dfrac{7}{5}$ なので，$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ ． $-\dfrac{3\pi}{2} < u < -\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2} < u+\pi < \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\} = u+\pi\ .$$

よって $u+\pi = \tan^{-1}\dfrac{7}{5}$ なので， $u = \tan^{-1}\dfrac{7}{5} - \pi$ ． 任意の実数 x について

$$-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{74}\sin\left(x + \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi\right)\ .$$

$r = \sqrt{74}$ かつ $s = \tan^{-1}\dfrac{7}{5} - \pi$ とすればよい．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 10.補遺3.4}}$　次のような実数 r, s の組を一つ求めなさい：任意の実数 x について $-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x+s)$ ．