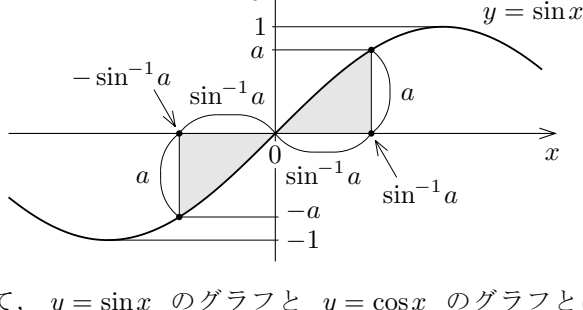
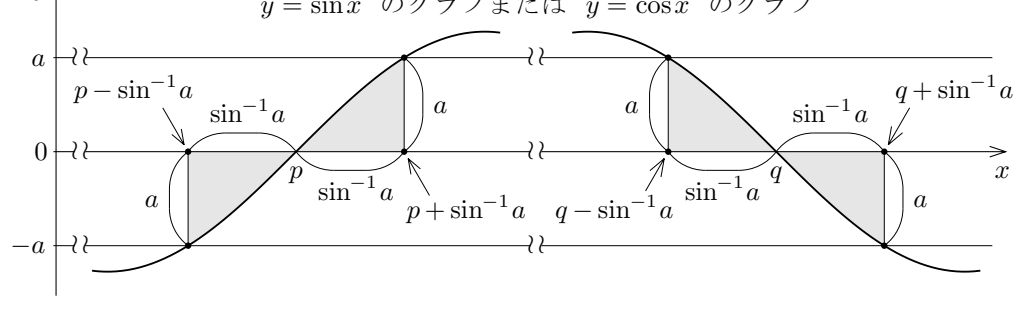


第10章の補遺4 三角関数が現れる方程式・不等式

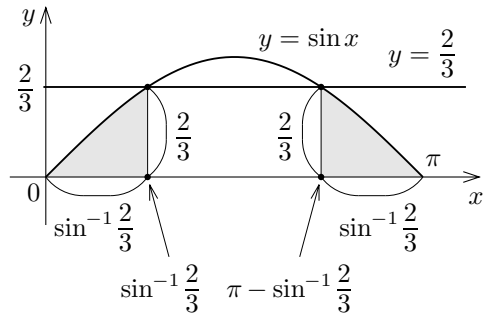
xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフを考えます。実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とします。点 (x, a) ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) が $y = \sin x$ のグラフに属するとき、 $a = \sin x$ なので、 $\sin^{-1} a = \sin^{-1}(\sin x) = x$ 、つまり $x = \sin^{-1} a$ です。点 $(x, -a)$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) が $y = \sin x$ のグラフに属するとき、 $-a = \sin x$ なので、 $\sin^{-1}(-a) = \sin^{-1}(\sin x) = -\sin^{-1}(\sin x) = x$ 、よって $x = \sin^{-1}(-a) = -\sin^{-1} a$ です。これらのことから次の図のようになります。



xy 座標平面において、 $y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフとは同じ形（合同）ですから、それらのグラフについて次の図のようになります。



例解 変数 x について $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \frac{2}{3}$ を解きます。 xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = \frac{2}{3}$ との共有点を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \frac{2}{3}$ を解くと、 $x = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ または $x = \pi - \sin^{-1} \frac{2}{3}$ 。



このことは次のようにして確かめられます。 $\sin(\sin^{-1} \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ ですから、 $\sin^{-1} \frac{2}{3}$ は方程式 $\sin x = \frac{2}{3}$ の解です。また、実数 X について、

$$\sin(\pi - X) = \sin(-X + \pi) = -\sin(-X) = -(-\sin X) = \sin X ;$$

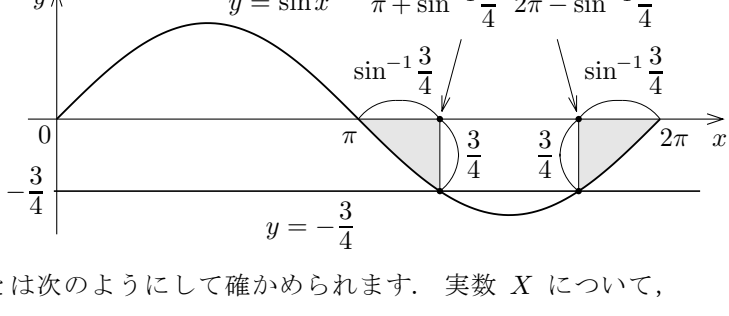
ここで $X = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ とおくと、

$$\sin(\pi - \sin^{-1} \frac{2}{3}) = \sin(\sin^{-1} \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} .$$

従って $\pi - \sin^{-1} \frac{2}{3}$ も方程式 $\sin x = \frac{2}{3}$ の解です。 終

問題 10.補遺4.1 実数 x に関する方程式 $\sin x = \frac{3}{5}$ (但し $0 \leq x \leq 2\pi$) を解きなさい。

例解 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x = -\frac{3}{4}$ を解きます。 xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = -\frac{3}{4}$ との共有点を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、方程式 $\sin x = -\frac{3}{4}$ の解は $\pi + \sin^{-1} \frac{3}{4}$ と $2\pi - \sin^{-1} \frac{3}{4}$ 。



このことは次のようにして確かめられます。実数 X について、

$$\sin(\pi + X) = \sin(X + \pi) = -\sin X ,$$

$$\sin(2\pi - X) = \sin(-X + 2\pi) = \sin(-X) = -\sin X .$$

これらのことより、

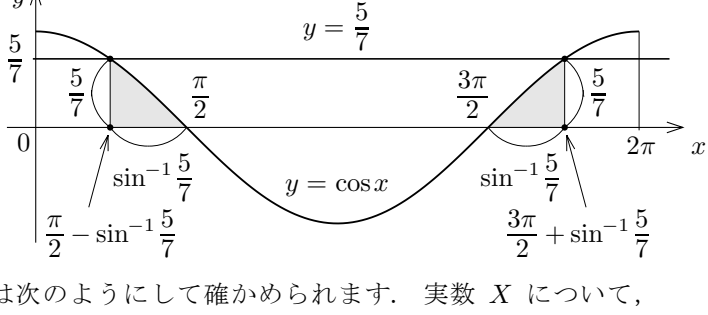
$$\sin(\pi + \sin^{-1} \frac{3}{4}) = -\sin(\sin^{-1} \frac{3}{4}) = -\frac{3}{4} ,$$

$$\sin(2\pi - \sin^{-1} \frac{3}{4}) = -\sin(\sin^{-1} \frac{3}{4}) = -\frac{3}{4} .$$

従って $\pi + \sin^{-1} \frac{3}{4}$ と $2\pi - \sin^{-1} \frac{3}{4}$ とは方程式 $\sin x = -\frac{3}{4}$ の解です。 終

問題 10.補遺4.2 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x = -\frac{7}{9}$ を解きなさい。

例解 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x = \frac{5}{7}$ を解きます。 xy 座標平面において $y = \cos x$ のグラフと直線 $y = \frac{5}{7}$ との共有点を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x = \frac{5}{7}$ を解くと、 $x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{5}{7}$ または $x = \frac{3\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{5}{7}$ 。



このことは次のようにして確かめられます。実数 X について、

$$\cos(\frac{\pi}{2} - X) = \cos(-X + \frac{\pi}{2}) = -\sin(-X) = \sin X ,$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + X) = \cos(X + \frac{\pi}{2} + \pi) = -\cos(X + \frac{\pi}{2}) = -(-\sin X) = \sin X ;$$

ここで $X = \sin^{-1} \frac{5}{7}$ とおくと、 $\sin(\sin^{-1} \frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$ なので、

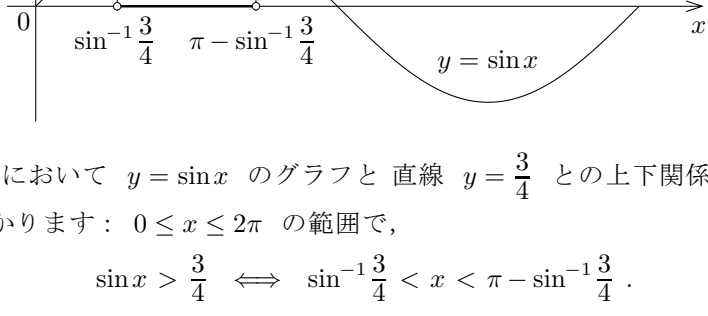
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{5}{7}) = \sin(\sin^{-1} \frac{5}{7}) = \frac{5}{7} ,$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{5}{7}) = \sin(\sin^{-1} \frac{5}{7}) = \frac{5}{7} .$$

従って $\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{5}{7}$ と $\frac{3\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{5}{7}$ とは方程式 $\cos x = \frac{5}{7}$ の解です。 終

問題 10.補遺4.3 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x = \frac{5}{8}$ を解きなさい。

例解 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x > \frac{3}{4}$ を解きます。 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \frac{3}{4}$ を解くと、 $x = \sin^{-1} \frac{3}{4}$ または $x = \pi - \sin^{-1} \frac{3}{4}$ 。



xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = \frac{3}{4}$ との上下関係を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、

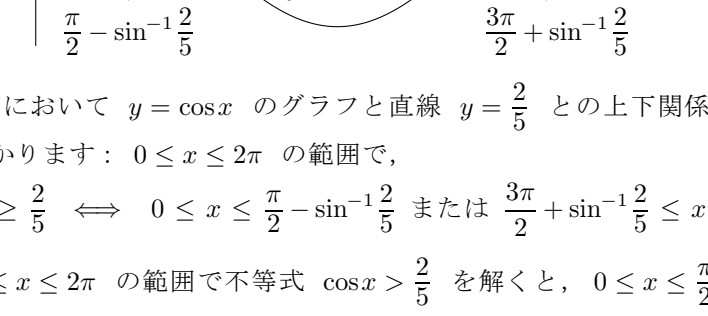
$$\sin x > \frac{3}{4} \iff \sin^{-1} \frac{3}{4} < x < \pi - \sin^{-1} \frac{3}{4} .$$

つまり、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x \leq \frac{3}{4}$ を解くと、 $0 \leq x \leq \sin^{-1} \frac{3}{4}$ または $\pi - \sin^{-1} \frac{3}{4} \leq x \leq 2\pi$ 。 終

問題 10.補遺4.4 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x \geq \frac{5}{6}$ を解きなさい。

問題 10.補遺4.5 実数 x に関する不等式 $\sin x < -\frac{4}{7}$ (但し $0 \leq x \leq 2\pi$) を解きなさい。

例解 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x \geq \frac{2}{5}$ を解きます。 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x = \frac{2}{5}$ を解くと、 $x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{2}{5}$ または $x = \frac{3\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{2}{5}$ 。



xy 座標平面において $y = \cos x$ のグラフと直線 $y = \frac{2}{5}$ との上下関係を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、

$$\cos x \geq \frac{2}{5} \iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{2}{5} \text{ または } \frac{3\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{2}{5} \leq x \leq 2\pi .$$

つまり、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x > \frac{2}{5}$ を解くと、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{2}{5}$ または $\frac{3\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{2}{5} < x \leq 2\pi$ 。 終

問題 10.補遺4.6 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x > \frac{3}{8}$ を解きなさい。