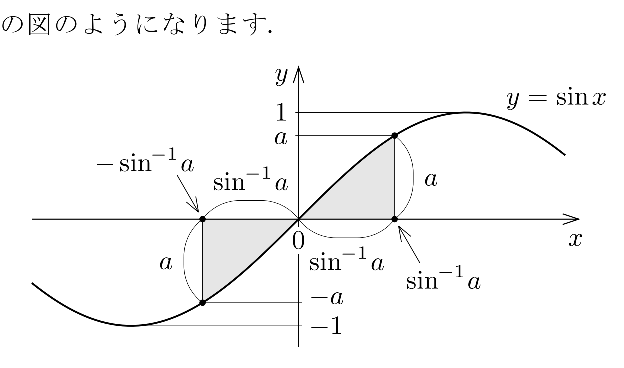
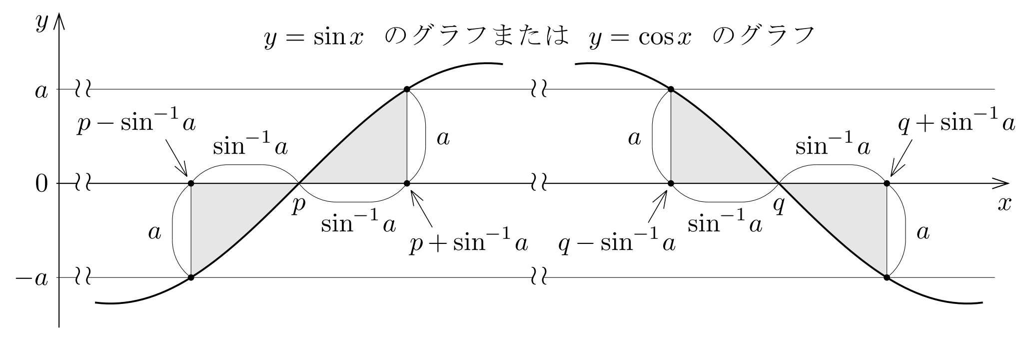
第10章の補遺4　三角関数が現れる方程式・不等式

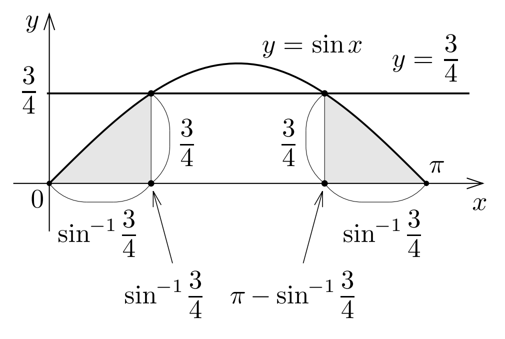
xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフを考えます．実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とします． $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ である実数 x について，点 (x,a) が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $a=\sin x$ なので， $\sin^{-1}a=\sin^{-1}(\sin x)=x$ ，つまり $x=\sin^{-1}a$ ． 点 $(x,-a)$ が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $-a=\sin x$ なので， $\sin^{-1}(-a)=\sin^{-1}(\sin x)=-\sin^{-1}(\sin x)=x$ ，よって $x=\sin^{-1}(-a)=-\sin^{-1}a$ ． これらのことから次の図のようになります．



xy 座標平面において， $y=\sin x$ のグラフと $y=\cos x$ のグラフとは同じ形（合同）ですから，それらのグラフについて次の図のようになります．



$\boxed{例解}$ 変数 x について $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ を解きます． xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフと直線 $y=\dfrac{3}{4}$ との共有点を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ を解くと， $x=\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ または $x=\pi-\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．



このことは次のようにして確かめられます． $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$ ですから， $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ は方程式 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ の解です． また，実数 X について，

$$\sin(\pi-X)=\sin(-X+\pi)=-\sin(-X)=-(-\sin X)=\sin X \ ;$$

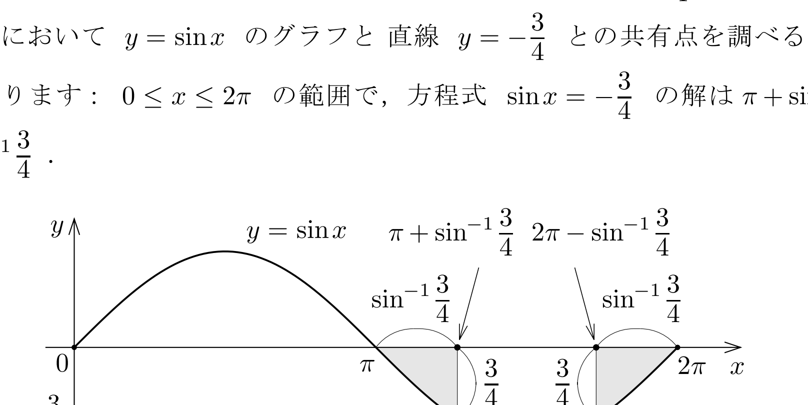
ここで $X=\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおくと，

$$\sin\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4} \ .$$

従って $\pi-\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ も方程式 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ の解です． $\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.補遺4.1}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x=\dfrac{3}{5}$ を解きなさい．

$\boxed{例解}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x=-\dfrac{3}{4}$ を解きます． xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフと 直線 $y=-\dfrac{3}{4}$ との共有点を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で，方程式 $\sin x=-\dfrac{3}{4}$ の解は $\pi+\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $2\pi-\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．



このことは次のようにして確かめられます． 実数 X について，

$$\sin(\pi+X)=\sin(X+\pi)=-\sin X \ ,$$
$$\sin(2\pi-X)=\sin(-X+2\pi)=\sin(-X)=-\sin X \ .$$

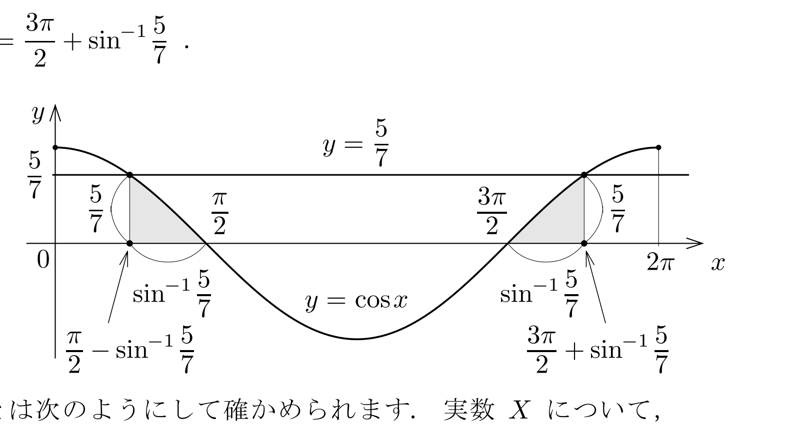
これらのことより，

$$\sin\left(\pi+\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=-\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4} \ ,$$
$$\sin\left(2\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=-\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4} \ .$$

従って $\pi+\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $2\pi-\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ とは方程式 $\sin x=-\dfrac{3}{4}$ の解です． $\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.補遺4.2}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x=-\dfrac{7}{9}$ を解きなさい．

$\boxed{例解}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x=\dfrac{5}{7}$ を解きます． xy 座標平面において $y=\cos x$ のグラフと 直線 $y=-\dfrac{5}{7}$ との共有点を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x=\dfrac{5}{7}$ を解くと， $x=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{5}{7}$ または $x=\dfrac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\dfrac{5}{7}$ ．



このことは次のようにして確かめられます． 実数 X について，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-X\right)=\cos\left(-X+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(-X)=\sin X \ ,$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+X\right)=\cos\left(X+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=-(-\sin X)=\sin X \ ;$$

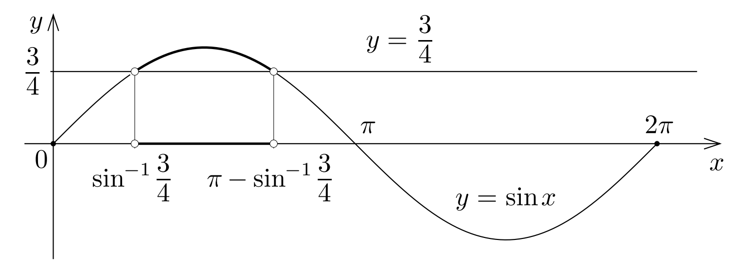
ここで $X=\sin^{-1}\dfrac{5}{7}$ とおくと， $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{5}{7}\right)=\dfrac{5}{7}$ なので，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{5}{7}\right)=\sin\left(\sin^{-1}\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7} \ ,$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\frac{5}{7}\right)=\sin\left(\sin^{-1}\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7} \ .$$

従って $\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{5}{7}$ と $\dfrac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\dfrac{5}{7}$ とは方程式 $\cos x=\dfrac{5}{7}$ の解です． $\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.補遺4.3}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x=\dfrac{5}{8}$ を解きなさい．

$\boxed{例解}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x>\dfrac{3}{4}$ を解きます． $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ を解くと， $x=\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ または $x=\pi-\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ ．



xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフと 直線 $y=\dfrac{3}{4}$ との上下関係を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で，

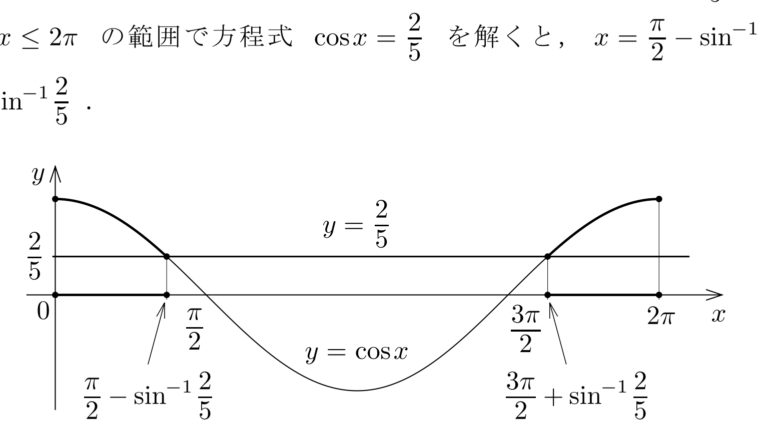
$$\sin x>\frac{3}{4} \iff \sin^{-1}\frac{3}{4}<x<\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4} \ .$$

つまり， $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x \leq \dfrac{3}{4}$ を解くと， $0 \leq x \leq \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ または $\pi-\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq 2\pi$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.補遺4.4}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x \geq \dfrac{5}{6}$ を解きなさい．

$\boxed{問題 10.補遺4.5}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\sin x<-\dfrac{4}{7}$ を解きなさい．

$\boxed{例解}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x \geq \dfrac{2}{5}$ を解きます． $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で方程式 $\cos x=\dfrac{2}{5}$ を解くと， $x=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{2}{5}$ または $x=\dfrac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\dfrac{2}{5}$ ．



xy 座標平面において $y=\cos x$ のグラフと直線 $y=\dfrac{2}{5}$ との上下関係を調べると次のことが分かります： $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で，

$$\cos x \geq \frac{2}{5} \iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{2}{5} \text{ または } \frac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\frac{2}{5} \leq x \leq 2\pi \ .$$

つまり， $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x>\dfrac{2}{5}$ を解くと， $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{2}{5}$ または $\dfrac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\dfrac{2}{5} \leq x \leq 2\pi$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{問題 10.補遺4.6}$ 変数 x について $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式 $\cos x>\dfrac{3}{8}$ を解きなさい．