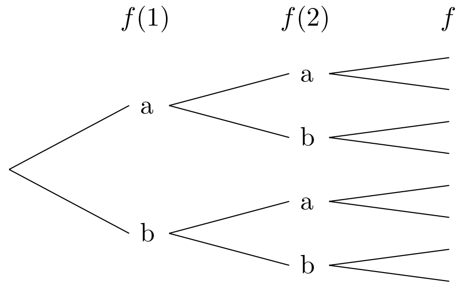
§11.4　写像の総数

$\boxed{\text{例解}}$　異なる2個のもの a と b とに対して，集合 $\{1,2,3\}$ から集合 $\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ への写像 f を考えます．集合 $\{1,2,3\}$ からの写像を決めることは $f(1),f(2),f(3)$ を決めることです．従って写像 f は次のような樹形図で枚挙できます．



a ⋯　$f(1)=\mathrm{a}$，$f(2)=\mathrm{a}$，$f(3)=\mathrm{a}$．
b ⋯　$f(1)=\mathrm{a}$，$f(2)=\mathrm{a}$，$f(3)=\mathrm{b}$．
a ⋯　$f(1)=\mathrm{a}$，$f(2)=\mathrm{b}$，$f(3)=\mathrm{a}$．
b ⋯　$f(1)=\mathrm{a}$，$f(2)=\mathrm{b}$，$f(3)=\mathrm{b}$．
a ⋯　$f(1)=\mathrm{b}$，$f(2)=\mathrm{a}$，$f(3)=\mathrm{a}$．
b ⋯　$f(1)=\mathrm{b}$，$f(2)=\mathrm{a}$，$f(3)=\mathrm{b}$．
a ⋯　$f(1)=\mathrm{b}$，$f(2)=\mathrm{b}$，$f(3)=\mathrm{a}$．
b ⋯　$f(1)=\mathrm{b}$，$f(2)=\mathrm{b}$，$f(3)=\mathrm{b}$．

このように，$f(1)$ を a にするか b にするかの2通りあり，$f(1)$ が何であっても $f(2)$ を a にするか b にするかの2通りありますから，積の法則より，$f(1)$ と $f(2)$ とを何にするかは (2×2) 通りあります；更に，$f(1)$ と $f(2)$ とが何であっても $f(3)$ を a にするか b にするかの2通りありますから，積の法則より，$f(1)$ と $f(2)$ と $f(3)$ とを何にするかは $(2\times2\times2)$ 通りあります．つまり，集合 $\{0,1,2\}$ から集合 $\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ への写像の総数は　$2^3=8$　です．　$\boxed{\text{終}}$

一般的に述べます．自然数 n と r とに対して，要素が r 個の集合 $\{1,2,3,\dots,r\}$ から要素が n 個の集合への写像 f を決めるとき次のようになります：

$f(1)$ を何にするかは n 通りあり，
$f(1)$ が何であっても $f(2)$ を何にするかは n 通りあり，
$f(1),f(2)$ が何であっても $f(3)$ を何にするかは n 通りあり，
⋮
$f(1)\sim f(r-2)$ が何であっても $f(r-1)$ を何にするかは n 通りあり，
$f(1)\sim f(r-1)$ が何であっても $f(r)$ を何にするかは n 通りある．

従って，積の法則より，要素が r 個の集合 $\{1,2,3,\dots,r\}$ から要素が n 個の集合への写像の総数は次のようになります：

$$\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n\times n}_{r\text{ 個の積}}=n^r$$

集合 A から集合 B への写像の総数は，集合 A の要素の個数と集合 B の要素の個数だけから決まり，集合 A とか B とかの要素が実際に何であるかは関係ありません．例えば，$\mathrm{a}\neq\mathrm{b}$，$\mathrm{p}\neq\mathrm{q}$　のとき，集合 $\{1,2,3\}$ から集合 $\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ への写像の総数と，集合 $\{7,8,9\}$ から集合 $\{\mathrm{p},\mathrm{q}\}$ への写像の総数とは同じです．

定理 11.4　自然数 n と r とに対して，要素が r 個の集合から要素が n 個の集合への写像の総数は n^r である．

$\boxed{\text{例題}}$　あるそば屋では注文できるそばが5種類ある．このそば屋に入って来た3人の客がそれぞれ1種類ずつそばを注文するとき，3人の各々がどの種類を注文するかについてあり得る場合の総数を求める．

〔解説〕3人の各人が5種類の中から1種類を注文することは，3人の集合から5種類の集合への写像である．従って，あり得る場合の総数は，要素が3個の集合から要素が5個の集合への写像の総数なので，$5^3=125$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.4.1}}$　4種類の缶ジュースが売られている自動販売機で，3人の各々が缶ジュースを1種類ずつ選んで買うとします．3人の各々がどの種類を選ぶかについてあり得る場合の総数を求めなさい．

積の法則を使って与えられた条件を満たす写像の総数を求めます．

$\boxed{\text{例題}}$　集合 $\{1,2,3\}$ から集合 $\{1,2,3,4,5\}$ への写像 f で次の条件を満たすものの総数を求める：$f(1)$ と $f(3)$ とは奇数で $f(2)$ は偶数である．

〔解説〕$f(1)$ を何にするかは 1 か 3 か 5 かの3通りがある．$f(1)$ が何であっても，$f(2)$ を何にするかは 2 か 4 かの2通りがあるので，$f(1),f(2)$ を何にするかは (3×2) 通りがある．$f(1),f(2)$ が何であっても，$f(3)$ を何にするかは 1 か 3 か 5 かの3通りがあるので，$f(1),f(2),f(3)$ を何にするかは $(3\times2\times3)$ 通りがある．つまり，与えられた条件を満たす写像の総数は 18 である．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.4.2}}$　集合 $\{1,2,3\}$ から集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ への写像 f で次の条件を満たすものの総数を求めなさい：$f(2)$ は偶数で $f(3)$ は 3 の倍数である．