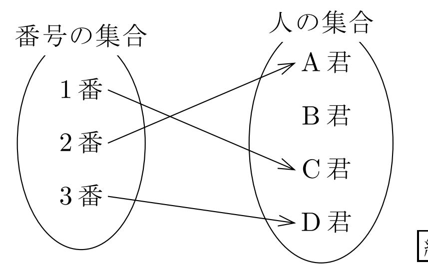
§11.5　順列の総数

$\boxed{\text{例解}}$　A君とB君とC君とD君との異なる4人中で1番の人と2番の人と3番の人とを決めるとします． 1番も3番もA君というように一人に複数の番号が付くことはないものとします． A君とB君とC君とD君との中で1番が誰で2番が誰で3番が誰かを決めることは，数学的には，番号の集合 {1番,2番,3番} から4人の集合 {A君,B君,C君,D君} への写像になります；加えて，一人に複数の番号が付かないということは，数学的には写像が1対1であるということです．

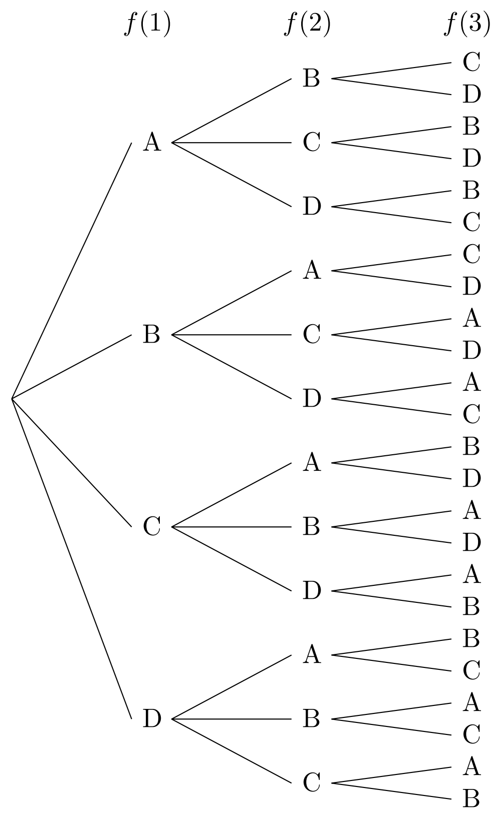


$\boxed{\text{終}}$

このように，番号の集合を定義域とする1対1の対応を**順列** (permutation) といいます．

定義　自然数 n と r とについて $r \leq n$ とする． 異なる n 個のもの $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ の中から r 個のものを取り出す順列とは，要素が r 個の集合 $\{1,2,3,\ldots,r-1,r\}$ から要素が n 個の集合 $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1},a_n\}$ への1対1写像のことである． 異なる n 個のものから r 個のものを取り出す順列の総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と書き表す．

$\boxed{\text{例解}}$　異なる4個のもの $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ の中から3個のものを取り出す順列は，集合 {1,2,3} から集合 {A,B,C,D} への1対1写像のことです． このような写像 f を樹形図を描いて枚挙すると次のようになります．



このように，$f(1)$ を何にするかは4通りあり，その各々の場合に対して $f(2)$ を何にするかは3通りありますから，積の法則より，$f(1), f(2)$ の各々を何にするかは (4×3) 通りあります；その各々の場合に対して $f(3)$ を何にするかは2通りありますから，積の法則より，$f(1), f(2), f(3)$ の各々を何にするかは $(4\times 3\times 2)$ 通りあります． つまり，異なる4個のものから3個のものを取り出す順列の総数は ${}_4\mathrm{P}_3 = 4\times 3\times 2 = 24$ です． $\boxed{\text{終}}$

一般的に述べます． 自然数 n と r とについて $r \leq n$ となるとき，異なる n 個のものから r 個のものを取り出す順列 f を決めるとき次のようになります：

$f(1)$ を何にするかは n 通りあり，
$f(1)$ を決めたとき $f(2)$ を何にするかは $(n-1)$ 通りあり，
$f(1), f(2)$ を決めたとき $f(3)$ を何にするかは $(n-2)$ 通りあり，
$\vdots$
$f(1) \sim f(r-2)$ を決めたとき $f(r-1)$ を何にするかは $(n-r+2)$ 通りあり，
$f(1) \sim f(r-1)$ を決めたとき $f(r)$ を何にするかは $(n-r+1)$ 通りある．

従って，異なる n 個のものから r 個のものを取り出す順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ は次のようになります：

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{P}_r &= \underbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\cdot(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例解}}$　異なる5個のもの $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}$ の中から3個のものを取り出す順列の総数 ${}_5\mathrm{P}_3$ は，要素が3個の集合 {1,2,3} の要素が5個の集合 {a,b,c,d,e} への1対1写像の総数です． このように，写像の個数だけを考えるときは，集合の要素が何かということは関係ありません． ですから例えば，要素が3個の集合 {天, 地, 人} から要素が5個の集合 {木, 火, 土, 金, 水} への1対1写像の総数も ${}_5\mathrm{P}_3$ です． $\boxed{\text{終}}$

一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 11.5.1　自然数 n と r とについて $r \leq n$ とする． 要素が r 個の集合から要素が n 個の集合への1対1写像の総数は

$$
{}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}}\ .
$$

$\boxed{\text{例題}}$　ある6人のグループの中で，準備係と記録係と連絡係とに1人ずつ割り当てる． 但し1人の人が複数の係に重複しないようにする． このときあり得る割り当ての総数を求める．

〔解説〕 6人のグループの中で準備係と記録係と連絡係とを，1人ずつ，複数の係に同じ人が重複しないように割り当てることは，数学的にいうと，3つの係の集合 {準備係, 記録係, 連絡係} から6人の集合への1対1写像である． 従って，あり得る割り当ての総数は，要素が3個の集合から要素が6個の集合への1対1写像の総数なので，

$$
{}_6\mathrm{P}_3 = 6\times 5\times 4 = 120\ .
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.5.1}}$　10人の委員会の中で，委員長と副委員長と書記との役職を1人ずつ決める． 但し1人の人が複数の役職に重複しないようにする． どの役職にどの委員が就くかについてあり得る場合の総数を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　5人の中から3人を選び出して左右に一列に並べるとき，左側・真中・右側の各々に誰がなるかについてあり得る配置の総数を求める．

〔解説〕 5人の中から3人を選び出して左右に一列に並べる配置は，数学的にいうと，3箇所の位置の集合 {左側, 真中, 右側} から5人の集合への1対1写像である． 従って，求める並べ方の総数は，要素が3個の集合から要素が5個の集合への1対1写像の総数なので，

$$
{}_5\mathrm{P}_3 = 5\times 4\times 3 = 60\ .
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.5.2}}$　異なる7冊の本の中から4冊の本を取り出して棚に一列に並べます． 本を並べる順序についてあり得る場合の総数を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　ある小型タクシーには，乗客の座席として助手席と後部座席右側と後部座席左側と後部座席真中とがある． このタクシーに4人の乗客が乗るとき，誰がどの座席に座るかについてあり得る場合の総数を求める．

〔解説〕 4人の誰がどの座席に座るか決めることは，数学的にいうと，乗用車に乗る4の人の集合から集合 {助手席, 後部座席右側, 後部座席左側, 後部座席真中} への1対1写像である． 従って，誰がどの座席に座るかについてあり得る場合の総数は，要素が4個の集合から要素が4個の集合への1対1写像の総数なので，

$$
{}_4\mathrm{P}_4 = 4\times 3\times 2\times 1 = 24\ .
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.5.3}}$　5人の選手から成る空手道のチームが他の空手道チームと団体戦をします． 5人の選手の中で先鋒と次鋒と中堅と副将と大将とを決めて1人ずつ対戦します（もちろん1人の選手が2回対戦することはありません）． 先鋒と次鋒と中堅と副将と大将とを決めるにおいてあり得る場合の総数を求めなさい．