§11.6　組合せの総数

$\boxed{\text{例解}}$　A君とB君とC君とD君との異なる4人の中から3人を選ぶとき，選ばれた3人の集まりは，数学的にいうと，要素が4個の集合 $\{\mathrm{A,B,C,D}\}$ の部分集合で要素が3個のものです．ですから，A君とB君とC君とD君との4人の中から3人を選ぶときの場合の総数は，要素が4個の集合 $\{\mathrm{A,B,C,D}\}$ の部分集合で要素が3個のものの総数です． $\boxed{\text{終}}$

このように，要素の個数が決められた部分集合を**組合せ** (combination) といいます．

定義　自然数 n と r とについて $r \le n$ とする．異なる n 個のもの $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ の中から r 個のものを取り出す組合せとは，要素が n 個の集合 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ の部分集合で要素が r 個のもののことである．異なる n 個のものから r 個のものを取り出す組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と書き表す．

$\boxed{\text{例解}}$　前節で述べたように，異なる4個のもの A, B, C, D の中から3個のものを取り出す順列とは，A, B, C, D の中で，一つのものに番号が重複しないように1番2番3番の番号を付けることです．このような番号のつけ方を次のように2段階に分けて考えます：
第1段階：A, B, C, D の4個のものの中から3個のものを選ぶ；
第2段階：選ばれた3個のものの各々に，一つのものに番号が重複しないように，1番2番3番の番号を付ける．
第1段階において，A, B, C, D の4個のものの中から3個のもの選ぶときにあり得る場合の総数は，組合せの総数 ${}_4\mathrm{C}_3$ です．それらの中のどの場合でも，第2段階において，選ばれた3個のものの各々に1番2番3番の番号を付けるときあり得る場合の総数は，順列の総数 ${}_3\mathrm{P}_3$ です．従って積の法則より，3個のものを選んで番号を付けるときの場合の総数は ${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{P}_3$ です．A, B, C, D の4個のものの中から3個のものに1番2番3番の番号を付けるときあり得る場合の総数は ${}_4\mathrm{P}_3$ ですから，次のようになります：

$$ {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{P}_3 = {}_4\mathrm{P}_3 \ . $$

よって次の等式が成り立ちます：

$$ {}_4\mathrm{C}_3 = \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{{}_3\mathrm{P}_3} \ . $$

次のように考えることもできます．異なる4個のもの A, B, C, D の中から3個のものを取り出す順列は，A, B, C, D の中の3個のものに1番2番3番の番号を付ける（但し一つのものに複数の番号が付かない）ことでした；ここで番号を付けた3個のものから番号を外すと，要素の個数が 3 の単なる集合つまり組合せになります．

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1番がAで2番がBで3番がCの順列}\\
\text{1番がAで2番がCで3番がBの順列}\\
\text{1番がBで2番がAで3番がCの順列}\\
\text{1番がBで2番がCで3番がAの順列}\\
\text{1番がCで2番がAで3番がBの順列}\\
\text{1番がCで2番がBで3番がAの順列}
\end{array}\right\}\ \text{番号を外すと 組合せ }\{\mathrm{A,B,C}\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1番がAで2番がBで3番がDの順列}\\
\text{1番がAで2番がDで3番がBの順列}\\
\text{1番がBで2番がAで3番がDの順列}\\
\text{1番がBで2番がDで3番がAの順列}\\
\text{1番がDで2番がAで3番がBの順列}\\
\text{1番がDで2番がBで3番がAの順列}
\end{array}\right\}\ \text{番号を外すと 組合せ }\{\mathrm{A,B,D}\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1番がAで2番がCで3番がDの順列}\\
\text{1番がAで2番がDで3番がCの順列}\\
\text{1番がCで2番がAで3番がDの順列}\\
\text{1番がCで2番がDで3番がAの順列}\\
\text{1番がDで2番がAで3番がCの順列}\\
\text{1番がDで2番がCで3番がAの順列}
\end{array}\right\}\ \text{番号を外すと 組合せ }\{\mathrm{A,C,D}\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1番がBで2番がCで3番がDの順列}\\
\text{1番がBで2番がDで3番がCの順列}\\
\text{1番がCで2番がBで3番がDの順列}\\
\text{1番がCで2番がDで3番がBの順列}\\
\text{1番がDで2番がBで3番がCの順列}\\
\text{1番がDで2番がAで3番がBの順列}
\end{array}\right\}\ \text{番号を外すと 組合せ }\{\mathrm{B,C,D}\}$$

このように，番号を外すと6個の順列が1個の組合せになります．つまり，番号を外すと3個のものに付けられた1番2番3番の番号が無視されるので，${}_3\mathrm{P}_3$ 個の順列が1個の組合せになります．従って，組合せの総数 ${}_4\mathrm{C}_3$ は順列の総数 ${}_4\mathrm{P}_3$ を ${}_3\mathrm{P}_3$ で割ったものです：

$$ {}_4\mathrm{C}_3 = \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{{}_3\mathrm{P}_3} \ . $$ $\boxed{\text{終}}$

一般的に述べます．自然数 n と r とについて $r \le n$ とします．異なる n 個のものの中から r 個のものを取り出す組合せの総数は ${}_n\mathrm{C}_r$ です；これらのどの組合せについても，取り出した r 個のものに，一つのものに番号が重複しないように1番から r 番までの番号を付けるときの場合の総数は ${}_r\mathrm{P}_r$ です．したがって，積の法則より，異なる n 個のものの中から r 個のものを取り出して番号が重複しないように1番から r 番までの番号を付けるときの場合の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ は次のようになります：

$$ {}_n\mathrm{C}_r \times {}_r\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{P}_r \ . $$

これより，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

或いは

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots 2\cdot 1} \ . $$

定理 11.6.1　自然数 n と r とについて $r \le n$ とする．異なる n 個のものから r 個のものを取り出す組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{(n-r+1)\cdot(n-r+2)(n-r+3)\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(r-1)\cdot r} \ . $$

$\boxed{\text{例題}}$　異なる7人の人間の中から3人のグループを作るときにあり得る場合の総数を求める．

異なる7人の人間の中から3人のグループを作るときにあり得る場合の総数は，異なる7人の中から3人を取り出す組合せの総数 ${}_7\mathrm{C}_3$ である：

$$ {}_7\mathrm{C}_3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35 \ . $$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.6.1}}$　異なる8匹の猫の中から3匹の猫を選ぶときにあり得る場合の総数を求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$　8人の人の中からバスケットボールチームの選手5人を選ぶときにあり得る場合の総数は次のようになります：

$$ {}_8\mathrm{C}_5 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 8\cdot 7 = 56 \ . $$

ところが，8人の中から選手5人を選ぶことは，8人の中から選手でない3人を選ぶことと同等です．従って，8人の中から選手5人を選ぶときにあり得る場合の総数は，8人の中から選手でない3人を選ぶときにあり得る場合の総数

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 8\cdot 7 = 56 $$

と等しくなります：${}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3$ ． $\boxed{\text{終}}$

一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 11.6.2　自然数 n と r とについて $r \le n$ のとき，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \ . $$

証明　定理 11.6.1 より，n 以下の各自然数 k について ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ．よって，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \ , \qquad {}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \ ; $$

従って ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ ． （証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　9人の人の中からバレーボールチームの選手6人を選ぶときにあり得る場合の総数を求める．

$$ {}_9\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84 \ . $$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.6.2}}$　将棋部の部員11人の中から将棋の大会に出場する選手を8人選ぶときにあり得る場合の総数を求めなさい．