§ 11.7　グループに分ける分け方の総数

例解　5人の人を3人のA班と2人のB班とに分けるときにあり得る班分けの総数を求めます．5人の中からA班の3人を選ぶと，B班は残りの2人に決まってしまいます．つまり，5人をA班の3人とB班の2人とに分けることは，5人の中からA班に属す3人を選ぶことと同等です．従って，5人をA班の3人とB班の2人とに分けるときにあり得る班分けの総数は，5人の中からA班の3人を選ぶときにあり得る場合の総数ですから，

$${}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10 \ .$$

終

例題　6人のグループが旅館の2人部屋と4人部屋とに別れて宿泊する．この6人を2人部屋と4人部屋とに振り分けるときあり得る振り分けの総数を求める．

〔解説〕 6人の中から2人部屋に泊まる2人を決めれば，それ以外の4人が4人部屋に泊まることになる．従って，6人を2人部屋と4人部屋とに振り分けるときにあり得る振り分けの総数は，6人の中から2人部屋に泊まる2人を選ぶときにあり得る場合の総数なので，

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15 \ .$$

終

問題 11.7.1　7人の人達で会場の設営と撤去とを行います．この7人を，設営を行うグループの4人と撤去を行うグループの3人とに振り分ける（両方のグループに属す人はいない）ときにあり得る振り分けの総数を求めなさい．

例解　白い碁石が5個，黒い碁石が2個あります．これらを一列に並べるときにあり得る配置の総数求めます．白い碁石どうしは区別できず，黒い碁石どうしも区別できないものとします．合計7個の碁石を一列に並べるので，例えば下図のように，列の1番目から7番目までの7箇所に碁石を置くことになります．

○	●	○	○	●	○	○
1番目	2番目	3番目	4番目	5番目	6番目	7番目

このように，白い碁石5個と黒い碁石2個とを一列に並べることは，碁石を置く7箇所を白い碁石を置く5箇所と黒い碁石を置く2箇所とに分けることです．従って，白い碁石5個と黒い碁石2個とを一列に並べるときにあり得る配置の総数は，7箇所を5箇所のグループと2箇所のグループとに分けるときにあり得る場合の総数ですから，

$${}_7\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21 \ .$$

終

例題　記号‘○’と‘×’とだけから成る列で，‘○’が5回‘×’が3回現れるようなものの総数を求める．

〔解説〕‘○’が5回‘×’が3回現れる列を作ることは，例えば下図のように，1番目から8番目までの8箇所を‘○’を置く5箇所と‘×’を置く3箇所とに分けることである．

○	○	×	○	×	×	○	○
1番目	2番目	3番目	4番目	5番目	6番目	7番目	8番目

従って，記号‘○’と‘×’とだけから成る列で‘○’が5回‘×’が3回現れるようなものの総数は，1番目から8番目までの8箇所を‘○’を置く5箇所と‘×’を置く3箇所とに分けるときの場合の総数なので，${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ ．

終

問題 11.7.2　数字‘0’と‘1’とだけから成る列で，‘0’が5回‘1’が4回現れるようなものの総数を求めなさい．

問題 11.7.3　記号‘△’と‘▽’とだけから成る列で，‘△’が6回‘▽’が4回現れるようなものの総数を求めなさい．

例解　7人の人を2人のA班と3人のB班と2人のC班とに分けるときの場合の総数を求めます．7人の中からA班の2人を選び出すときの場合の総数は ${}_7\mathrm{C}_2$ です．A班の2人をどのように選び出しても，その残りの5人の中からB班の3人を選び出すときの場合の総数は ${}_5\mathrm{C}_3$ です．従って，積の法則より，7人の中からA班の2人を選び出して残りの5人の中からB班の3人を選び出すときの場合の総数は ${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3$ です．A班の2人とB班の3人とを選び出すと，C班は残りの2人に決まってしまいます．故に，7人の人を2人のA班と3人のB班と2人のC班とに分けるときの場合の総数は

$${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_2\,{}_5\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 210 \ .$$

7人の中から，先にB班の3人を選び出し，次にC班の2人を選び出し，残りの2人をA班にする，というように考えて計算しても結果は同じです：

$${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 210 \ .$$

終

例題　ある人が他のもう1人の人と9回ジャンケンをする．9回のジャンケンの勝敗だけを考えるとき，結果が4勝3敗2引き分けになる場合の総数を求める．

〔解説〕 9回のジャンケンの結果が4勝3敗2引き分けになる場合の総数は，1回めから9回めまでの9回のジャンケンを引き分けの2回と負けの3回と勝ちの4回とに分ける分け方の総数，つまり9個のものを2個のグループと3個のグループと4個のグループとに分けるときの場合の総数なので，

$${}_9\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3 = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 18\cdot 70 = 1260 \ .$$

終

問題 11.7.4　10人の学生に課題を与えます．課題はAとBとCとの3種類があり，各学生にこの内の一つの課題を割り当てます．課題Aを割り当てる学生を4人，課題Bを割り当てる学生を3人，課題Cを割り当てる学生を3人とするとき，学生に課題を割り当てるときの場合の総数を求めなさい．

先に述べたように，自然数 n, p について $p \leq n$ のとき，全体で n 個のものをグループAに属す p 個のものとグループBに属す $(n-p)$ 個のものとに分ける分け方の総数は ${}_n\mathrm{C}_p$ です．但し，このことが成り立つのは，グループに分けたときの各グループが区別されるときです．

例題　異なる6冊の本を2つの箱に3冊ずつに分けて入れる．以下の各々の条件の下で，どう分けるかについて場合の総数を求める．

(1)　2つの箱を区別できるとき．

(2)　2つの箱を区別できないとき．

〔解説〕 2つの箱の一方にAと書いた札を付け，他方にBと書いた札を付ける．

異なる6冊の本をAの札の箱に入れる3冊とBの札の箱に入れる3冊とに分けることは，6冊の本をAのグループに入れる3冊とBのグループに入れる3冊とに分けることである．その分け方の総数は ${}_6\mathrm{C}_3$ である．

異なる6冊の本を a, b, c, d, e, f とおく．6冊の本をAの札の箱とBの札の箱とに3冊づつに分けて入れたあと，両方の札を外すと箱の区別はできないとする．このとき，例えば，

a, b, c を札Aの箱に入れて d, e, f を札Bの箱に入れた状態と，

a, b, c を札Bの箱に入れて d, e, f を札Aの箱に入れた状態と

は，両方の札を外すと区別できなくなる．このように，箱に札がついていたとき区別できた2つの状態が，箱から札を外すと区別できなくなる．従って，箱から札を外して2つの箱を区別できないとき，6冊の本を3冊ずつ2つの箱に分けるときの場合の総数は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{2}$ である．

(1)　2つの箱を区別するとき，あり得る場合の総数は

$${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20 \ .$$

(2)　2つの箱を区別しないとき，あり得る場合の総数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2} = \frac{20}{2} = 10 \ .$$

終

問題 11.7.5　8人の学生が4人ずつ2つの班に分かれて実験をします．以下の各々の条件の下で，実験の班分けについてあり得る場合の総数を求めなさい．

(1)　2つの班が異なる実験をするとき．

(2)　2つの班が同じ実験をするとき．

いくつかのものを区別がつくグループに分けるときあり得る場合の総数は次のようになります．自然数 a, b に対して，全部で $(a+b)$ 個のものをグループAに属す a 個とグループBに属す b 個とに分ける分け方の総数は

$${}_{a+b}\mathrm{C}_a = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} \ .$$

自然数 a, b, c に対して，全部で $(a+b+c)$ 個のものをグループAに属す a 個とグループBに属す b 個とグループCに属す c 個とに分ける分け方の総数は，$(a+b+c)$ 個のものをグループAに属す a 個とグループBまたはCに属す $(b+c)$ 個とに分ける分け方の総数が ${}_{a+b+c}\mathrm{C}_a$ で，それぞれの分け方に対して，グループBまたはCに属す $(b+c)$ 個のものをグループBに属す b 個とグループCに属す c 個とに分ける分け方の総数が ${}_{b+c}\mathrm{C}_b$ なので，積の法則より，

$${}_{a+b+c}\mathrm{C}_a \times {}_{b+c}\mathrm{C}_b = \frac{(a+b+c)!}{a!\,(b+c)!}\cdot\frac{(b+c)!}{b!\,c!} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!} \ .$$