

第11章の補遺1 重複順列の総数

順列は番号に対するものを定める1対1写像です。つまり順列では一つのものに複数の番号が重複しません。1対1という条件がなければ、写像の値が重複してもかまいません；このような写像を重複順列といいます。つまり、重複順列とは単に番号に対するものを定める写像のことです。

定義 自然数 n と r とに対して、異なる n 個のもの $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ から r 個のものを取り出す重複順列とは、大きさ r の集合 $\{1, 2, 3, \dots, r-1, r\}$ から大きさ n の集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ への写像のことである。異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複順列の総数を ${}_n\Pi_r$ と書き表す。

自然数 n と r とに対して、異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複順列の総数 ${}_n\Pi_r$ は、大きさ r の集合 $\{1, 2, 3, \dots, r-1, r\}$ から大きさ n の集合への写像の総数ですから、定理11.4より n^r です。

定理 自然数 n と r とに対して、異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複順列の総数は ${}_n\Pi_r = n^r$.

例題 5人の人の中で記録係1人と連絡係1人と準備係1人とを決めるとする。以下の各々の条件の下で、3つの係のそれぞれに誰になるかについてあり得る場合の総数を求めなさい。

- (1) 3つの係は別々の3人の人にする。
- (2) 一人の人が2つあるいは3つの係を兼ねてもよい。

【解説】 5人の人の中で記録係1人と連絡係1人と準備係1人とを決める決め方は、記録係と連絡係と準備係との各々に5人のうちの誰か1人を対応させるような対応であり、数学的にいうと、集合 {記録係, 連絡係, 準備係} から5人の集合への写像である。

(1) の条件では、複数の係に同じ人が重複しないので、3つの係の決め方は集合 {記録係, 連絡係, 準備係} から5人の集合への1対1写像である。従って、あり得る場合の総数は、異なる5個のものから3個のものを取り出す順列の総数なので、

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 .$$

(2) の条件では、複数の係に同じ人が重複しても構わないので、3つの係の決め方は集合 {記録係, 連絡係, 準備係} から5人の集合への写像である。従って、あり得る場合の総数は、異なる5個のものから3個のものを取り出す重複順列の総数なので、

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125 . \quad \text{終}$$

問題 11.補遺1.1 7人の人の中で、パーティの準備役1人と会計役1人と後始末役1人とを決めるとします。以下の各々の条件の下で、3つの役のそれぞれに誰になるかについてあり得る場合の総数を求めなさい。

- (1) 3つの役は別々の3人の人にする。
- (2) 一人の人が2つあるいは3つの役を兼ねてもよい。

例題 1番から4番までの番号の4個のビリヤードの玉が袋の中に入っている。この中から玉を1個ずつ3回取り出す。以下の各々の条件の下で、3回の各々でどの玉を取り出すかについてあり得る場合の総数を求める。

- (1) 1度取り出された玉は取り除いて、以降の回は残りの玉の中から取り出す。
- (2) 毎回取り出された玉を袋の中に戻して、1回めも2回めも3回めも最初にある4個の玉の中から取り出す。

【解説】 3回の各々でどの玉を取り出すか決めることは、1回め2回め3回めの各々に4個の玉のうちのどれか1個を対応させるような対応であり、数学的にいうと、集合 {1回め, 2回め, 3回め} から4個の玉の集合への写像である。

(1) の条件で玉を取り出すとき、一度取り出された玉は二度と取り出されないのので、3回の各々でどの玉を取り出すか決めることは、集合 {1回め, 2回め, 3回め} から4個の玉の集合への1対1写像である。従ってその総数は、異なる4個の玉の中から3個を取り出す順列の総数なので、

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24 .$$

(2) の条件で玉を取り出すとき、同じ玉が重複して何回も取り出されることがあるので、3回の各々でどの玉を取り出すか決めることは、集合 {1回め, 2回め, 3回め} から4個の玉の集合への写像である。従ってその総数は、異なる4個の玉の中から3個を取り出す重複順列の総数なので、

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64 . \quad \text{終}$$

問題 11.補遺1.2 1番から5番までの番号の5個のビリヤードの玉が袋の中に入っています。この中から玉を1個ずつ4回取り出します。以下の各々の条件の下で、4回の各々でどの玉を取り出すかについてあり得る場合の総数を求める。

- (1) 1度取り出された玉は取り除いて、以降の回は残りの玉の中から取り出す。
- (2) 毎回取り出された玉を袋の中に戻して、1回めも2回めも3回めも4回めも最初にある5個の玉の中から取り出す。