第11章の補遺3　重複組合せの総数

$\boxed{\text{例解}}$　4種類の缶ジュースが売られています．これらの中から7本を選ぶときの場合の総数を求めます．どの種類の缶ジュースも7本以上あるとします．異なる種類の缶ジュースどうしは区別しますが，同じ種類の缶ジュースどうしは区別しないものとします．缶ジュースの4つの種類を A, B, C, D とします．同じ種類の缶ジュースは区別しないので，それぞれの種類の缶ジュースの本数だけに着目します．種類 A, B, C, D の各々の缶ジュースの本数の決め方は，A, B, C, D のそれぞれに個数を対応させることですから，数学的には，集合 {A,B,C,D} から自然数全体への写像です．種類 A, B, C, D の各々の缶ジュースの本数の合計が 7 になるということは，集合 {A,B,C,D} から自然数全体への写像 f について

$$f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})+f(\mathrm{D})=7$$

となるということです．つまり，合計が 7 になるような4種類の缶ジュースの各々の本数を決める場合の総数は，集合 {A,B,C,D} から自然数全体への写像 f で

$$f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})+f(\mathrm{D})=7$$

となるもののことです．　$\boxed{\text{終}}$

このように，幾つかの種類のものがあるとき，各々の種類のものを何個ずつ選ぶような組合せを重複組合せといいます．つまり，重複組合せでは，同じ種類のものを重複して何回でも取り出すことが認められます．

定義　自然数 n と r とに対して，異なる n 個のもの $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ から r 個のものを取り出す重複組合せとは，大きさ n の集合 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ から自然数全体への写像 f で

$$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{n-1})+f(a_n)=r$$

となるもののことである．異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複組合せの総数を ${}_n\mathrm{H}_r$ と書き表す．

“異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複組合せ”といいますが，多くの場合，“異なる n 種類のものから r 個のものを取り出す重複組合せ”という方が実際的です．

$\boxed{\text{例解}}$　異なる4個のもの A, B, C, D から7個のものを取り出す重複組合せの総数を求めます．7個のものの一つ一つを記号‘○’で表します．そして，例えばAを2個BをO個Cを4個Dを1個併せて7個取り出すことを，記号‘○’と仕切りの記号‘|’との列“ ○○||○○○○|○ ”に対応させます．この記号列は次のような意味です．

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\mathrm{A}}\,|\,\underbrace{}_{\mathrm{B}}\,|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\mathrm{C}}\,|\,\underbrace{\bigcirc}_{\mathrm{D}}$$

このような対応で，A, B, C, D から7個のものを取り出す重複組合せと，記号‘○’と‘|’との列で‘○’が7回‘|’が3回現れるものとは，過不足なく一つずつ対応します．記号‘○’と‘|’との列で‘○’が7回‘|’が3回現れるものの総数は ${}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3$ ですから，異なる4個のもの A, B, C, D から7個のものを取り出す重複組合せの総数は

$${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=120\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

一般的に考えます．正の自然数 n と自然数 r とに対して，異なる n 個のもの a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ から r 個のものを取り出す重複組合せを，r 個の記号‘○’を‘|’で仕切った次のような記号列に対応させます：

$$\overbrace{\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{a_1}\,|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{a_2}\,|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{a_3}\,|\cdots|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{a_n}}^{\bigcirc\ \text{は全部で}\ r\ \text{個}}\ .$$

仕切りの縦線‘|’の数は $(n-1)$ 本です．このようにすると，異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複組合せと，記号‘○’と‘|’との列で‘○’が r 回‘|’が $(n-1)$ 回現れるものとは，過不足なく一つずつ対応します．記号‘○’と‘|’との列で‘○’が r 回‘|’が $(n-1)$ 回現れるものの総数は ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ ですから，異なる n 個のものから r 個のものを取り出す重複組合せの総数 ${}_n\mathrm{H}_r$ は

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r\ .$$

定理　自然数 n と自然数 r とについて，$n\geq 1$ のとき，n 個のものの中から r 個を取り出す重複組合せの総数は ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　6人でジャンケンをするとき，グーを出す人の数とチョキを出す人の数とパーを出す人の数との組合せの総数を求める．

〔解説〕グーを出す人の数とチョキを出す人の数とパーを出す人の数との組合せは，グーとチョキとパーとの3種類のものがあって，この中から6個のものを取り出す重複組合せである．従って，求める組合せの総数は

$${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}=36\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 11.補遺3.1}}$　単一と単二と単三との3種類の乾電池を合計して8本集めるとき，どの種類の乾電池を何本集めるかという場合の総数を求めなさい．単一・単二・単三のどの種類の乾電池も8本以上用意されているとし，同じ種類の乾電池どうしは区別しません．

$\boxed{\text{問題 11.補遺3.2}}$　ある蕎麦屋では7種類の蕎麦を注文できます．あるときこの蕎麦屋に4人連れの客が来ました．この4人の各人が7種類の中から1種類ずつ注文するとき，この4人の客のために蕎麦屋がどの種類の蕎麦をいくつ作るかという組合せの総数を求めなさい．