第1章の補遺1　小数と実数

大雑把にいうと実数とは小数で表せる数のことです．実数には有理数と無理数とがあります．それでは有理数を表す小数と無理数を表す小数とでは何か違いがあるのでしょうか．

例えば，

$$65.34, \qquad -157.48627, \qquad 38.294852176$$

などのように，小数点以下の桁数が有限である小数を有限小数といいます．整数は小数点以下の桁数が 0 である有限小数と考えます．また例えば，

$$34.5677777777\cdots, \quad -0.0123123123123123123\cdots, \quad 3.5790246802468024680246802468\cdots,$$

などのように，ある位から下の位では一定の数字列の繰り返しが無限に続く小数を循環小数といいます．

例として，分数 $\dfrac{76}{13}$ を小数で表してみます．76 を 13 で割るとき，割算の筆算では次々と無限に剰余ができますが，剰余は割る数 13 より小さい自然数（0も含める）なので，何回めかの剰余はそれより上にでた剰余のどれかと同じになります．この割り算では7回めの剰余の 11 は1回め剰余と同じになります．従って，計算を続けると以後この繰り返しが無限に続くことになります：

$$\frac{76}{13} = 5.846153\,846153\,846153\cdots .$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \;5.846153 \\
13 & \!\!\big)\,76 \\
 & \underline{65} \\
 & 11 \qquad \cdots\ 1\text{回めの剰余} \\
 & \underline{104} \\
 & 6 \\
 & \underline{52} \\
 & 8 \\
 & \underline{78} \\
 & 2 \\
 & \underline{13} \\
 & 7 \\
 & \underline{65} \\
 & 5 \\
 & \underline{39} \\
 & 11 \qquad \cdots\ 7\text{回めの剰余}
\end{array}
$$

このように分数 $\dfrac{76}{13}$ を小数で表すと循環小数になります．

整数を整数で割る筆算において，次々と出て来る剰余は，途中で 0 になるか無限に続くかのどちらかです．途中で剰余が 0 になるときはそこで割り算の計算は終りですから，商は有限小数になります．剰余が無限に続くときは上述の例のように商は循環小数になります．このように，分子も分母も整数である分数を小数で表すと有限小数か循環小数かになります．有理数は分子も分母も整数である分数で表されます．よって，有理数を小数で表すと有限小数か循環小数かになります．逆に，有限小数か循環小数かで表わせる数は有理数です．その証明は略しますが，例として循環小数

$$5.67\,1234\,1234\,1234\,1234\,1234\cdots$$

を分数で表します．$10000x$ から x を引きます．

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 10000x & = & 56712.34\,1234\,1234\,1234\,1234\,1234\cdots \\
-) & x & = & 5.67\,1234\,1234\,1234\,1234\,1234\cdots \\
\hline
 & 9999x & = & 56706.67
\end{array}
$$

従って $999900x = 5670667$ なので，$x = \dfrac{5670667}{999900}$ ．つまり，

$$5.67123412341234123412341234\cdots = \frac{5670667}{999900} .$$

このような方法で循環小数で表される数は分母分子が整数の分数で表すことができます．よって循環小数で表される数は有理数です．

このようにして次のことが分かります：任意の実数 a について，

$$a \text{ は有理数である} \iff a \text{ は有限小数か循環小数かで表せる}\ .$$

有理数は有限小数または循環小数で表せますが，有限小数でも循環小数でもない小数もあります．例えば次のような小数です：

$$123.4567891011121314151617181920\cdots .$$

この小数が表す実数は有理数ではありませんから，無理数です．このようにして次のことが成り立ちます：任意の実数 a について，

$$
\begin{aligned}
a \text{ は無理数である} &\iff a \text{ は有理数でない} \\
&\iff a \text{ を表す小数は有限小数でも循環小数でもない}\ .
\end{aligned}
$$