

第1章の補遺2 2の平方根は無理数であることの証明

1.6節末で説明したように、正の2の平方根つまり $\sqrt{2}$ は小数で表せるので実数です。しかし $\sqrt{2}$ は有理数ではありません；つまり $\sqrt{2}$ は無理数です。このことを証明します。

整数 m と n とが互いに素であるとは、 m と n との公約数は1と -1 とだけであることです。

有理数は分母と分子とが整数である分数で表されます。そのような分数は、できる限り約分していくと、いつかは約分できない分数になります。分数が約分できないとき、分母の整数と分子の整数との公約数は1と -1 とだけです；つまり分母の整数と分子の整数とは互いに素になります。このようにして次の定理が証明されます。

補助定理A 任意の有理数 x に対して $x = \frac{m}{n}$ となる互いに素な整数 m と n とがある。

補助定理をもう1つ準備します。

補助定理B 任意の整数 m について、 m^2 が偶数ならば m は偶数である。

証明 整数 m が奇数であれば、適当な整数 k を選ぶと $m = 2k + 1$ となるので、

$$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 ;$$

従って m^2 も奇数である。つまり次のことがいえる： m が奇数ならば m^2 は奇数である。この対偶をとると次のことがいえる： m^2 が奇数でないならば m も奇数でない。奇数でない整数は偶数なので、次のことがいえる： m^2 が偶数ならば m は偶数である。 (証明終り)

有理数でない実数を無理数といいます。先に述べた2つの補助定理を用いて、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明します。 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導きます。

仮に $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定します。補助定理Aより、 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ となる互いに素な2つの整数 m と n とがあります。

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \sqrt{2}^2 ,$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 ,$$

$$2n^2 = m^2 .$$

$2n^2$ は偶数ですから m^2 は偶数です。従って、上の補助定理Bより、 m も偶数です。ですから、 $k = \frac{m}{2}$ とおくと、 k は整数です。上の等式 $2n^2 = m^2$ 及び $m = 2k$ より、

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 ,$$

$$n^2 = 2k^2 .$$

$2k^2$ は偶数ですから n^2 は偶数です、従って、上の補助定理Bより、 n も偶数です。このように、 m も n も偶数です。つまり、2は m と n との公約数です。ところが、 m と n とは互いに素です。つまり、 m と n の公約数は1と -1 とだけです。

このように、 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると矛盾が生じます。ですから $\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定は間違いです。つまり $\sqrt{2}$ は無理数ではありません。