§2.1　整式

ある特定の文字，例えば x に着目するとき，自然数 n に対して，x が現れない式 A と x の n 乗 x^n との積の形で表される式 Ax^n を，x（について）の n 次の単項式あるいは n 次の項といいます．この単項式 Ax^n において，自然数 n を**次数** (degree) といい，x が現れない部分 A を**係数** (coefficient) といいます．例えば次のようになります：

$$-\frac{7x^4}{3} \text{ は } x \text{ の4次の単項式で係数は } -\frac{7}{3} \text{ です；}$$
$$(2+\sqrt{5})y \text{ は } y \text{ の1次の単項式で係数は } 2+\sqrt{5} \text{ です；}$$
$$(a^2-4)t^3 \text{ は } t \text{ の3次の単項式で係数は } a^2-4 \text{ です．}$$

1.2節で定義したように，任意の数 x に対して $x^0=1$ でした．従って，文字 x が現れない式 A について，$A=Ax^0$ ですから，A は x の0次の単項式です．つまり，

$$x \text{ が現れない式は } x \text{ の0次の単項式}$$

です．但し，定数0は x の単項式ですが，その次数は考えません．

x の単項式，及び，いくつかの x の単項式の和の形の式を，x（について）の多項式といいます．多項式を構成する各々の単項式をその多項式の**項** (term) といいます．例えば，式 $(4-\sqrt{7})x+(3a-7)x^2-\frac{2}{5}x^3-a^2-6$ は x の多項式で次のようになります：

$$\underbrace{(4-\sqrt{7})x}_{1\text{次の項}}+\underbrace{(3a-7)x^2}_{2\text{次の項}}+\Big(\underbrace{-\frac{2}{5}x^3}_{3\text{次の項}}\Big)+\underbrace{(-a^2-6)}_{0\text{次の項}}.$$

多項式の項の次数の中で最大の数をその多項式の**次数**といいます．例えば，上述の多項式 $(4-\sqrt{7})x+(3a-7)x^2-\frac{2}{5}x^3-a^2-6$ での次数は3です．

整理すると x（について）の多項式になる式を，x（について）の**整式**といいます[1]．例えば x の式 $x^2(x-5)$ は，$x^2(x-5)=x^3-5x^2$ というように多項式になるので，整式です．整式の次数とはできるだけ簡単な多項式に整理したときの多項式の次数です．自然数 n に対して，次数が n の整式を n 次式といいます．

x についての整式を扱うときは，x が現れない式を定数項といいます．定数項，つまり x が現れない式は，0または0次式です．逆に，0次式は定数項になります．ですから，文字 x に着目するとき次のようになります：

$$\text{定数項} \;=\; x \text{ が現れない式} \;=\; 0 \text{ または } x \text{ の0次式}.$$

整式について，次数の高い項ほど先に現れる形に整理することを降冪の順に整理するといいます．例えば，x の3次式を降冪の順に整理すると次の形になります：

$$\underbrace{\underbrace{Ax^3}_{3\text{次の項}} + \underbrace{Bx^2}_{2\text{次の項}} + \underbrace{Cx}_{1\text{次の項}} + \underbrace{D}_{\text{定数項}}}_{\xrightarrow{\text{項の次数が下降していく}}} \qquad (\text{但し } A,B,C,D \text{ は } x \text{ が現れない式}),$$

ここで2次の項 Bx^2，1次の項 Cx，定数項 D は無いこともあります．また，整式について，次数の低い項ほど先に現れるように整理することを昇冪の順に整理するといいます．例えば，x の3次式を昇冪の順に整理すると次の形になります：

$$\underbrace{\underbrace{A}_{\text{定数項}} + \underbrace{Bx}_{1\text{次の項}} + \underbrace{Cx^2}_{2\text{次の項}} + \underbrace{Dx^3}_{3\text{次の項}}}_{\xrightarrow{\text{項の次数が上昇していく}}} \qquad (\text{但し } A,B,C,D \text{ は } x \text{ が現れない式}),$$

ここで定数項 A，1次の項 Bx，2次の項 Cx^2 は無いこともあります．

多くの場合整式は降冪の順に整理します．そのために，分配法則から導ける公式

$$Ax^n+Bx^n=(A+B)x^n \qquad (n \text{ は自然数})$$

を用いて，次数が同じ項を1つの項にまとめます．

$\boxed{\text{例}}$　x の整式 $4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2$ を，降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2 &= \Big(2-\frac{5}{2}\Big)x^2+(4-\sqrt{3})x+6\\ &= -\frac{1}{2}x^2+(4-\sqrt{3})x+6,\end{aligned}$$

昇冪の順に整理すると

$$4x+2x^2-\sqrt{3}x+6-\frac{5}{2}x^2=6+(4-\sqrt{3})x-\frac{1}{2}x^2.$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.1.1}}$　x の整式 $-5x+\frac{8}{3}x^2+\sqrt{2}-(4x^2-\sqrt{7}x)$ を降冪の順及び昇冪の順に整理しなさい．

複数の文字が現れる整式は，着目する文字によって項や整式の次数が異なることがあります．

$\boxed{\text{例}}$　文字 x と a とが現われる式 $\frac{a^3x^2}{7}$ は，x の単項式と考えると2次式であり，a の単項式と考えると3次式です．文字 x と k とが現われる式 $\frac{kx^2}{5}-\sqrt{3}x^3+2k^2$ は，x の整式と考えると3次式であり，k の整式と考えると2次式です．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　式 $2x(x-5k+4)+k(x^2-3k+7x)$ を，x の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2x(x-5k+4)+k(x^2-3k+7x) &= 2x^2-10kx+8x+kx^2-3k^2+7kx\\ &= (k+2)x^2+(8-3k)x-3k^2,\end{aligned}$$

k の整式として降冪の順に整理すると

$$\begin{aligned}2x(x-5k+4)+k(x^2-3k+7x) &= 2x^2-10xk+8x+x^2k-3k^2+7xk\\ &= -3k^2+(x^2-3x)k+2x^2+8x.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.1.2}}$　式 $2p(3x-p+2)-x(2x-3p^2+5p)$ を，x の整式として降冪の順に整理しなさい；更に，p の整式として降冪の順に整理しなさい．

定数 a,b,c に対して x の整式 ax^2+bx+c を考えます．この整式 ax^2+bx+c は普通に考えると x の2次式です．ところが，$a\neq 0$ と断わられていない限り，$a=0$ かもしれません．$a=0$ のときを考慮すると，x の整式 ax^2+bx+c の次数は2以下ということになります．このように，整式の次数が2以下であるとき，次数が高々2次であるといいます．一般に，自然数 n に対して，整式の次数が n 以下であるとき，その整式は高々 n 次であるといいます．

複数の文字，例えば x と y とに着目して，x も y も現れない式 A と x の冪 x^m（m は自然数）と y の冪 y^n（n は自然数）との積で表される式 Ax^my^n を x と y と（について）の単項式といい，$m+n$ を次数，x と y とが現れない式の部分 A を係数といいます．また，x と y との単項式または x と y との単項式の和の形に整理できる式を x と y と（について）の多項式あるいは整式といいます．

---

[1] 実際には多項式と整式とはあまり区別されません．