§2.2　整式の加法・減法・乗法

整式と整式とを足すことを整式の加法といい，整式から整式を引くことを整式の減法といいます． 整式の加法・減法の計算では，分配法則から導かれる次の等式が基になります：自然数 n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して，

$$Ax^n \pm Bx^n = (A \pm B)x^n \qquad \text{（複号同順）} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$ ， $B = ax^2 - 4x - 2$ とおきます． $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理します．

$$A+B = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 + ax^2 - 4x - 2 = 2x^3 - 4ax^2 + (3a-4)x + 4 \ .$$
$$A-B = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 - (ax^2 - 4x - 2) = 2x^3 - 6ax^2 + (3a+4)x + 8 \ .$$
$$B-A = ax^2 - 4x - 2 - (2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6) = -2x^3 + 6ax^2 - (3a+4)x - 8 \ . \quad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.2.1}}$　x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$ ， $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおきます． $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理しなさい．

整式と整式との積はやはり整式になります．

まず単項式の乗法から始めます． 自然数 m, n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して，x の単項式 Ax^m と Bx^n との積はやはり x の単項式になります：指数法則 $x^m x^n = x^{m+n}$ を用いると，

$$Ax^m \times Bx^n = ABx^m x^n = ABx^{m+n} \ .$$

整式と整式とを掛けることを整式の乗法といいます． 多くの場合，整式の乗法の計算では単項式の和の形に整理します． このことを整式の展開といいます． 展開には分配法則（1.1節の法則1.1.9）が重要になります．

$\boxed{\text{例}}$　x の1次式 $2x+5$ と $3x-4$ との積を展開して整理します． 分配法則を用います．

$$\begin{aligned}(2x+5)(3x-4) &= 2x(3x-4) + 5(3x-4) \\ &= 2x \cdot 3x - 2x \cdot 4 + 5 \cdot 3x - 5 \cdot 4 = 6x^2 - 8x + 15x - 20 \\ &= 6x^2 + 7x - 20 \ . \end{aligned} \quad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例解}}$　x の1次式 $2x-5$ と2次式 $3x^2 - x - 7$ との積を展開して整理します．

$$\begin{aligned}(2x-5)(3x^2-x-7) &= 2x(3x^2-x-7) - 5(3x^2-x-7) \\ &= 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot x - 2x \cdot 7 - 5 \cdot 3x - 5 \cdot (-x) - 5 \cdot (-7) \\ &= 6x^3 - 2x^2 - 14x - 15x^2 + 5x + 35 \\ &= 6x^3 - 17x^2 - 9x + 35 \ . \end{aligned}$$

この展開を次のように計算することもあります．

$$\begin{array}{rrrrl} & 3x^2 & -x & -7 & \\ \times & & 2x & -5 & \\ \hline 6x^3 & -2x^2 & -14x & & \leftarrow (3x^2-x-7) \times 2x \\ & -15x^2 & +5x & +35 & \leftarrow (3x^2-x-7) \times (-5) \\ \hline 6x^3 & -17x^2 & -9x & +35 & \leftarrow (3x^2-x-7) \times 2x + (3x^2-x-7) \times (-5) \end{array} \quad \boxed{\text{終}}$$

原則として，展開した結果は降冪の順（或いは昇冪の順）に整理します．

$\boxed{\text{例題}}$　y の整式 $(2y-k)(y^2-3y+2k)$ を展開して降冪の順に整理する．

$$\begin{aligned}(2y-k)(y^2-3y+2k) &= 2y(y^2-3y+2k) - k(y^2-3y+2k) \\ &= 2y^3 - 6y^2 + 4ky - ky^2 + 3ky - 2k^2 \\ &= 2y^3 - (k+6)y^2 + 7ky - 2k^2 \ . \end{aligned} \quad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.2.2}}$　以下の整式を展開して x の整式として降冪の順に整理しなさい．

(1) $\left(3x + \dfrac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3)$ ．　　　(2) $(3x-2k)(x^2+2kx-3)$ ．

整式の展開に1.3節の乗法公式を使うこともあります：任意の数 a, b, c, d, x について，

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{（複号同順）} \ , \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \ , \\ (x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \ , \\ (ax+b)(cx+d) &= acx^2 + (ad+bc)x + bd \ , \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{（複号同順）} \ , \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= a^3 \pm b^3 \quad \text{（複号同順）} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例題}}$　x の整式 $(2x-3)(x-2k+1)$ を展開して降冪の順に整理する．

乗法公式 $(ax+b)(cx+d) = acx + (ad+bc)x + bd$ を用いる．

$$\begin{aligned}(2x-3)(x-2k+1) &= (2x-3)\{x + (-2k+1)\} \\ &= 2x^2 + \{2(-2k+1) - 3\}x - 3(-2k+1) \\ &= 2x^2 + (-4k-1)x + 6k - 3 \\ &= 2x^2 - (4k+1)x + 6k - 3 \ . \end{aligned} \quad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.2.3}}$　x の整式 $(ax+2)(3x-4a)$ を展開して降冪の順に整理しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　y の整式 $\left(y + \dfrac{2}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理する．

乗法公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いる．

$$\left(y + \frac{2}{3}\right)^3 = y^3 + 3y^2\frac{2}{3} + 3y\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \ . \quad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.2.4}}$　y の整式 $\left(y - \dfrac{4}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理しなさい．

一般に，自然数 m と n とについて，

m 次式と n 次式との積は $(m+n)$ 次式

になります．