§2.4　整式の約数と倍数

整数 a と 0 以外の整数 b とについて，a を b で割ると剰余（余り）が 0 になるとき，a は b で割り切れるといいます；更にこのとき，a は b の倍数であるといい，b は a の約数あるいは因数であるといいます． 整式についても同様のいい方をします．

整式 A と 0 以外の整式 B とについて，A を B で割ると剰余が 0 になるとき，A は B で割り切れるといいます． 更に，A が B で割り切れるとき，A は B の**倍数**であるといい，B は A の**約数**あるいは**因数**であるといいます．

整式 A と 0 以外の整式 B とについて，A を B で割るときの剰余とは次のような整式 R のことでした：

$$A = BQ + R \qquad \text{（但し } Q \text{ は整式で } R \text{ は 0 または } B \text{ より次数が低い整式）} \ .$$

この剰余 R が 0 になるということは $A=BQ$ となることですから，

$$\begin{aligned} A \text{ が } B \text{ で割り切れる} &\iff A \text{ を } B \text{ で割るときの剰余が 0 である} \\ &\iff A=BQ \text{ となる整式 } Q \text{ がある} \\ &\iff B \text{ は } A \text{ の約数（因数）である} \\ &\iff A \text{ は } B \text{ の倍数である .} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ ですから，整式 $x+1$ 及び $x-3$ は整式 x^2-2x-3 の約数で，x^2-2x-3 は $x+1$ の倍数であり $x-3$ の倍数です． また，

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=7(x+1)\times\frac{1}{7}(x-3)=(7x+7)\left(\frac{x}{7}-\frac{3}{7}\right) \ ,$$

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=\frac{5}{2}(x+1)\times\frac{2}{5}(x-3)=\left(\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}\right) \ ;$$

従って，整式 $7(x+1)=7x+7$ や $\frac{5}{2}(x+1)=\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$ などは x^2-2x-3 の約数で，整式 x^2-2x-3 は $7x+7$ の倍数であり $\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$ の倍数です． $\boxed{\text{終}}$

整式 A, B, P などが文字 x についての整式であることを明示するために，$A(x)$，$B(x)$，$P(x)$ などと書き表すことがあります． そして，x の整式 $P(x)$ および数 α に対して，x に α を代入したときの $P(x)$ の値を $P(\alpha)$ と書き表します．

$\boxed{\text{例}}$　x の整式 $A(x)=x^3-4x^2+15$ において x に 3 を代入したときの値を $A(3)$ と書き表します：

$$A(3)=3^3-4\cdot 3^2+15=27-36+15=6 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例解}}$　x の整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-2$ で割るとします． このとき剰余は 0 または 1 次式 $x-2$ より次数が低い整式ですから，0 または 0 次式です；つまり剰余は定数ですから，x を含みません． この剰余を R とおき，整商を $Q(x)$ とおくと，

$$P(x) = (x-2)Q(x)+R \ .$$

この等式の両辺の x に 2 を代入します． このとき R は x を含まないので変わりません：

$$P(2) = (2-2)Q(2)+R \ .$$

この等式の右辺を計算すると

$$(2-2)Q(2)+R = 0\cdot Q(2)+R = R \ ,$$

よって

$$P(2) = R \ .$$

$$\begin{array}{rrrrr} & x^2 & -3x & -\ 6 & \\ \hline x-2\ \big) & x^3 - 5x^2 & & +\ 7 & \\ & x^3 - 2x^2 & & & \\ \hline & -3x^2 & & & \\ & -3x^2 & +6x & & \\ \hline & & -6x & +\ 7 & \\ & & -6x & +12 & \\ \hline & & & -\ 5 & \end{array}$$

つまり，$P(x)$ を $x-2$ で割るときの剰余 R は $P(2)$ と等しくなります． 実際，例えば $P(x)=x^3-5x^2+7$ を $x-2$ で割ると剰余は -5 ですが，これは次の値と等しくなります：

$$P(2)=2^3-5\cdot 2^2+7=8-20+7=-5 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

一般的にいうと次の定理が成り立ちます．

定理（剰余定理）　x の整式 $P(x)$ 及び定数 α について，$P(x)$ を x の 1 次式 $x-\alpha$ で割るときの剰余は $P(\alpha)$ [4] に等しい．

証明　$P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割るときの整商を $Q(x)$ と，剰余を R とおく：

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x)+R \quad \text{(但し } R \text{ は 0 または } x-\alpha \text{ より次数が低い整式)} \ .$$

剰余 R は，0 または 1 より低い次数の整式なので，0 または 0 次式である；つまり定数である． よって R は x を含まない． 上の等式において x に α を代入すると

$$P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R = 0\cdot Q(\alpha)+R = R \ ;$$

つまり，$P(x)$ を $x-\alpha$ で割るときの剰余 R は $P(\alpha)$ に等しい．　（証明終り）

$\boxed{\text{例}}$　x の整式 x^3+2x^2 を x の整式 $x+3$ で割るときの剰余を求めます． $P(x)=x^3+2x^2$ とおきます． 剰余定理より，$P(x)$ を $x+3$ で割るときの剰余は $P(-3)$ の値です．

$$P(-3) = (-3)^3+2\cdot(-3)^2 = -27+18 = -9 \ .$$

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & -\ x & +3 \\ \hline x+3\ \big) & x^3+2x^2 & & \\ & x^3+3x^2 & & \\ \hline & -\ x^2 & & \\ & -\ x^2 & -3x & \\ \hline & & 3x & \\ & & 3x & +9 \\ \hline & & & -9 \end{array}$$

故に x^3+2x^2 を $x+3$ で割るときの剰余は -9 です．
実際に x^3+2x^2 を $x+3$ で割っても剰余は -9 です． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.4.1}}$　x の整式 $3x^4+7x$ を x の整式 $x+2$ で割るときの剰余を，剰余定理を用いる方法と実際に除算する方法とで求めなさい．

x の整式 $P(x)$ 及び定数 α について，$P(x)$ が 1 次式 $x-\alpha$ で割り切れるとは，整式 $P(x)$ を B で割るときの剰余が 0 になることでした：

$$P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる} \iff P(x) \text{ を } x-\alpha \text{ で割るときの剰余} = 0 \ .$$

剰余定理より，$P(x)$ を $x-\alpha$ で割るときの剰余は $P(\alpha)$ ですから，

$$P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる} \iff P(\alpha) = 0 \ .$$

この事実は因数定理とよばれる重要な定理です．

定理（因数定理）　x の整式 $P(x)$ 及び定数 α について，

$$P(x) \text{ が } x-\alpha \text{ で割り切れる} \iff P(\alpha) = 0 \ .$$

因数定理より，x の整式 $P(x)$ 及び定数 α について次のことが成り立ちます：

$P(\alpha)=0$ ならば $P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる；
$P(\alpha)\neq 0$ ならば $P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れない [5]．

$\boxed{\text{例}}$　x の 3 次式 x^3-3x^2+4 が，x の 1 次式 x，$x+1$，$x-1$，$x+2$，$x-2$ の各々で割り切れるかどうか判定します． $P(x)=x^3-3x^2+4$ とおきます．

$$\begin{aligned} P(0) &= 0^3-3\cdot 0^2+4=4\neq 0 \ , \\ P(-1) &= (-1)^3-3\cdot(-1)^2+4=0 \ , \\ P(1) &= 1^3-3\cdot 1^2+4=2\neq 0 \ , \\ P(-2) &= (-2)^3-3\cdot(-2)^2+4=-16\neq 0 \ , \\ P(2) &= 2^3-3\cdot 2^2+4=0 \ . \end{aligned}$$

因数定理より，x の 3 次式 x^3-3x^2+4 は，$x+1$ と $x-2$ とで割り切れて，x，$x-1$，$x+2$ では割り切れません． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.4.2}}$　x の 4 次式 x^4+5x-6 について，x の 1 次式 x，$x+1$，$x-1$，$x+2$，$x-2$ の各々で割り切れるかどうか判定しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　次の条件を満たす x の 2 次式 $P(x)$ を一つ求める：$P(5)=0$ かつ $P(-2)=0$ ． 結果は降冪の順に整理する．

〔解説〕 x の 2 次式 $P(x)$ について $P(5)=0$ かつ $P(-2)=0$ とする． 因数定理より，2 次式 $P(x)$ は 1 次式 $x-5$ と $x+2$ とで割り切れる． つまり $x-5$ と $x+2$ とは $P(x)$ の因数である． $x-5$ と $x+2$ とを因数とする 2 次式の一つは $(x-5)(x+2)$ ，展開して整理すると

$$(x-5)(x+2) = x^2-3x-10 \ .$$

従って $P(5)=0$ かつ $P(-2)=0$ となる 2 次式 $P(x)$ の一つは $x^2-3x-10$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.4.3}}$　次の条件を満たす x の 2 次式 $P(x)$ を一つ求めなさい：$P(4)=0$ かつ $P(-3)=0$ ． 結果は降冪の順に整理しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　次の条件を満たす x の 3 次式 $P(x)$ を一つ求める：$P(2)=0$ かつ $P(-3)=0$ かつ $P(4)=0$ ． 結果は降冪の順に整理する．

〔解説〕 x の 3 次式 $P(x)$ について $P(2)=0$ かつ $P(-3)=0$ かつ $P(4)=0$ とする． 因数定理より，3 次式 $P(x)$ は 1 次式 $x-2$ と $x+3$ と $x-4$ とで割り切れる． つまり $x-2$ と $x+3$ と $x-4$ とは $P(x)$ の因数である． $x-2$ と $x+3$ と $x-4$ とを因数とする 3 次式の一つは $(x-2)(x+3)(x-4)$ ，展開して整理すると

$$(x-2)(x+3)(x-4) = x^2-3x-10x+24 \ .$$

従って $P(2)=0$ かつ $P(-3)=0$ かつ $P(4)=0$ となる 3 次式 $P(x)$ の一つは $x^2-3x-10x+24$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.4.4}}$　次の条件を満たす x の 3 次式 $P(x)$ を一つ求めなさい：$P(2)=0$ かつ $P(-3)=0$ かつ $P(5)=0$ ． 結果は降冪の順に整理しなさい．

---

[4] $P(\alpha)$ は $P(x)$ のなかの x に α を代入した式ですから，$P(\alpha)$ の中には x が現れません；従って，$P(\alpha)$ を x の整式とみなすとこれは定数です．

[5] 因数定理より，“ $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるならば $P(\alpha)=0$ ” です． この対偶をとると，“ $P(\alpha)\neq 0$ ならば $P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れない ” となります．