

§2.6 整式の公約数・公倍数

まず整数の公約数・公倍数について述べます。

整数 a と b とは 0 でないとし、 a と b との公約数とは、 a の約数でありかつ b の約数でもある整数のことです。 a と b との公約数の中で最大の数を最大公約数といいます。 a と b との公倍数とは、 a の倍数でありかつ b の倍数でもある整数のことです。 a と b との正の公倍数の中で最小の整数を最小公倍数といいます。

例解 168 と 180 との最大公約数と最小公倍数とを求めます⁶⁾。まず 168 と 180 とを素因数分解します：

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7, \quad 180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です。

$$\begin{array}{cccccccc} 168 & = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & 2 & \times & \boxed{3} & \times & 7 \\ 180 & = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & & \times & \boxed{3} & \times & 3 & \times & 5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\ \text{最大公約数} & \text{は} & 2 & \times & 2 & \times & 3 & & & & & & = 12 \end{array}$$

最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です。

$$\begin{array}{cccccccccccc} 168 & = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & 2 & \times & \boxed{3} & \times & & \times & 7 \\ 180 & = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & & \times & \boxed{3} & \times & 3 & \times & 5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{最小公倍数} & \text{は} & 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 3 & \times & 5 & \times & 7 & = 2520 \end{array}$$

このように、168 と 180 とについて、最大公約数は 12 で、最小公倍数は 2520 です。 終

整式の公約数・公倍数について述べます。整式 A と B とは 0 でないとし、 A と B との公約数とは、 A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことです。 A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数といいます。このように、整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味です。 A と B との公倍数とは、 A の倍数でありかつ B の倍数でもある整式のことです。 A と B との 0 でない公倍数のなかで次数が最低の整式を A と B との最小公倍数といいます。このように、整式の最小公倍数という言葉の“最小”は次数が最小であるという意味です。

例解 x の整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最大公約数と最小公倍数とを求めます⁷⁾。最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です。

$$\begin{array}{cccccccc} (x+1)^3(x-2) & = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & \times & (x+1) & \times & \boxed{(x-2)} \\ (x+1)^2(x-2)(x+3) & = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & \times & & \times & \boxed{(x-2)} & \times & (x+3) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{最大公約数} & \text{は} & (x+1) & \times & (x+1) & \times & & \times & (x-2) & & \end{array}$$

最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です。

$$\begin{array}{cccccccc} (x+1)^3(x-2) & = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & \times & (x+1) & \times & \boxed{(x-2)} \\ (x+1)^2(x-2)(x+3) & = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & \times & & \times & \boxed{(x-2)} & \times & (x+3) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{最小公倍数} & \text{は} & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x-2) & \times & (x+3) \end{array}$$

このように、整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ について、最大公約数は $(x+1)^2(x-2)$ で、最小公倍数は $(x+1)^3(x-2)(x+3)$ です。 終

例題 x の整式 $x^2 - 5x + 6$ と $3x^2 - 7x - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。

【解説】 各々の整式を因数分解する：

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3), \quad 3x^2 - 7x - 6 = (x-3)(3x+2).$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の総ての積 $x-3$ であり、最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の総ての積 $(x-2)(x-3)(3x+2)$ である⁸⁾。 終

問題 2.6.1 x の整式 $x^2 - 6x + 8$ と $2x^2 - 7x + 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めなさい。

例解 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考えます。整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり、どちらも 1 次式ですから、どちらも最大公約数です（公約数の次数は 1 が最高です）。最大公約数としては簡単な方の $x+4$ をとる方が望ましいかもしれません。次に、 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公倍数を考えます。 x の整式 $3(x-1)(x-2)(x+4)$ は公倍数であり、これに $\frac{1}{3}$ を掛けた整式 $\frac{1}{3}3(x-1)(x-2)(x+4) = (x-1)(x-2)(x+4)$ もやはり公倍数です。どちらも 3 次式ですから、どちらも最小公倍数です（公倍数の次数は 3 が最低です）。 終

例題 y の整式 $2y^2 + 6y - 8$ と $4y^2 - 4y - 8$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。

【解説】 各々の整式を因数分解する：

$$\begin{aligned} 2y^2 + 6y - 8 &= 2(y^2 + 3y - 4) = 2(y-1)(y+4), \\ 4y^2 - 4y - 8 &= 4(y^2 - y - 2) = 4(y+1)(y-2). \end{aligned}$$

定数の因数を無視して、 y の整式 $(y-1)(y+4)$ と $(y+1)(y-2)$ との最大公約数・最小公倍数を考えればよい。最大公約数は 1 であり、最小公倍数は $(y+1)(y-1)(y-2)(y+4)$ である。 終

問題 2.6.2 y の整式 $4y^2 - 12y + 8$ と $4y^2 - 2y - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めなさい。

例えば x の整式 $4(x+1)(x-2)$ と $4(x+2)(x-3)$ との公約数を考えると、両方に共通の 1 以上の次数の因数はありません。このように、整式 A と整式 B との両方に共通の 1 以上の次数の因数がないとき、 A と B とは互いに素であるといいます。

⁶⁾ この方法は総ての因数が正のときに適用できます。
⁷⁾ この方法は総ての因数の最高次の項の係数が 1 のときに適用できます。
⁸⁾ 因数分解されている式は、特に要求されない限り、敢えて展開する必要はありません。