§2.6　整式の公約数・公倍数

まず整数の公約数・公倍数について述べます.

整数 a と b とは 0 でないとします. a と b との公約数とは, a の約数でありかつ b の約数でもある整数のことです. a と b との公約数の中で最大の数を最大公約数といいます. a と b との公倍数とは, a の倍数でありかつ b の倍数でもある整数のことです. a と b との正の公倍数の中で最小の整数を最小公倍数といいます.

例解　168 と 180 との最大公約数と最小公倍数とを求めます[6]. まず 168 と 180 とを素因数分解します:

$$168 = 2\times2\times2\times3\times7\,, \qquad 180 = 2\times2\times3\times3\times5\,.$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です.

$$\begin{array}{rccccccccccccl}
168 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & 2 & \times & \boxed{3} & & & & & \times & 7 \\
180 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & & & \times & \boxed{3} & \times & 3 & \times & 5 & & \\
\text{最大公約数は} & 2 & \times & 2 & & & \times & 3 & & & & & & = 12
\end{array}$$

最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です.

$$\begin{array}{rcccccccccccccl}
168 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & 2 & \times & \boxed{3} & & & & & \times & 7 & \\
180 = & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & & & \times & \boxed{3} & \times & 3 & \times & 5 & & & \\
\text{最小公倍数は} & 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 3 & \times & 5 & \times & 7 & = 2520
\end{array}$$

このように, 168 と 180 とについて, 最大公約数は 12 で, 最小公倍数は 2520 です.　終

整式の公約数・公倍数について述べます. 整式 A と B とは 0 でないとします. A と B との公約数とは, A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことです. A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数といいます. このように, 整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味です. A と B との公倍数とは, A の倍数でありかつ B の倍数でもある整数のことです. A と B との 0 でない公倍数のなかで次数が最低の整式を A と B との最小公倍数といいます. このように, 整式の最小公倍数という言葉の“最小”は次数が最小であるという意味です.

例解　x の整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最大公約数と最小公倍数とを求めます[7]. 最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
(x+1)^3(x-2) = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & \times & (x+1) & \times & \boxed{(x-2)} & & \\
(x+1)^2(x-2)(x+3) = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & & & \times & \boxed{(x-2)} & \times & (x+3) \\
\text{最大公約数は} & (x+1) & \times & (x+1) & & & \times & (x-2) & &
\end{array}$$

最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積です.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
(x+1)^3(x-2) = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & \times & (x+1) & \times & \boxed{(x-2)} & & \\
(x+1)^2(x-2)(x+3) = & \boxed{(x+1)} & \times & \boxed{(x+1)} & & & \times & \boxed{(x-2)} & \times & (x+3) \\
\text{最小公倍数は} & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x+1) & \times & (x-2) & \times & (x+3)
\end{array}$$

このように, 整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ について, 最大公約数は $(x+1)^2(x-2)$ で, 最小公倍数は $(x+1)^3(x-2)(x+3)$ です.　終

例題　x の整式 x^2-5x+6 と $3x^2-7x-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求める.

〔解説〕 各々の整式を因数分解する:

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)\,, \qquad 3x^2-7x-6 = (x-3)(3x+2)\,.$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の総ての積 $x-3$ であり, 最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の総ての積 $(x-2)(x-3)(3x+2)$ である[8].　終

問題 2.6.1　x の整式 x^2-6x+8 と $2x^2-7x+6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めなさい.

例解　x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考えます. 整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり, どちらも 1 次式ですから, どちらも最大公約数です（公約数の次数は 1 が最高です）. 最大公約数としては簡単な方の $x+4$ をとる方が望ましいかもしれません. 次に, x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公倍数を考えます. x の整式 $3(x-1)(x-2)(x+4)$ は公倍数であり, これに $\dfrac{1}{3}$ を掛けた整式 $\dfrac{1}{3}3(x-1)(x-2)(x+4) = (x-1)(x-2)(x+4)$ もやはり公倍数です. どちらも 3 次式ですから, どちらも最小公倍数です（公倍数の次数は 3 が最低です）.　終

例題　y の整式 $2y^2+6y-8$ と $4y^2-4y-8$ との最大公約数と最小公倍数とを求める.

〔解説〕 各々の整式を因数分解する:

$$2y^2+6y-8 = 2(y^2+3y-4) = 2(y-1)(y+4)\,,$$
$$4y^2-4y-8 = 4(y^2-y-2) = 4(y+1)(y-2)\,.$$

定数の因数を無視して, y の整式 $(y-1)(y+4)$ と $(y+1)(y-2)$ との最大公約数・最小公倍数を考えればよい. 最大公約数は 1 であり, 最小公倍数は $(y+1)(y-1)(y-2)(y+4)$ である.　終

問題 2.6.2　y の整式 $4y^2-12y+8$ と $4y^2-2y-6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めなさい.

例えば x の整式 $4(x+1)(x-2)$ と $4(x+2)(x-3)$ との公約数を考えると, 両方に共通の 1 以上の次数の因数はありません. このように, 整式 A と整式 B との両方に共通の 1 以上の次数の因数がないとき, A と B とは互いに素であるといいます.

---

[6] この方法は総ての因数が正のときに適用できます.
[7] この方法は総ての因数の最高次の項の係数が 1 のときに適用できます.
[8] 因数分解されている式は, 特に要求されない限り, 敢えて展開する必要はありません.