

§ 2.7 分数式の計算

整式と整式との和・差・積はまた整式になりました。しかし、整式を整式で割る場合、割り切れない（つまり剰余が 0 でない）ことがよくあります。そこで、例えば整数 8 を整数 3 で割るときの商を分数 $\frac{8}{3}$ で書き表すように、例えば整式 $3x+4$ を整式 $2x^2-5$ で割るときの商を分数の形の式 $\frac{3x+4}{2x^2-5}$ で表現します。このような分数の形の式を分数式といいます。任意の整式 A 及び 0 以外の任意の整式 B に対して、 A を B で割るときの商を分数式 $\frac{A}{B}$ で表します。

分数式については次の性質が最も基本的です：整式 A, B, C について、 $B \neq 0$ 、 $C \neq 0$ のとき

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}.$$

このような変形を約分といいます。分数式の約束事として、分数式はできる限り約分しておきます。

例 分数式 $\frac{21a^4b^2}{15ab^4}$ を約分します：

$$\frac{21a^4b^2}{15ab^4} = \frac{21 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b}{15 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{7 \cdot a \cdot a \cdot a}{5 \cdot b \cdot b} = \frac{7a^3}{5b^2}.$$

終

問題 2.7.1 分数式 $\frac{12a^3bc^2}{18a^2b^3d}$ を約分しなさい。

例題 分数式 $\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$ を約分する。

【解説】 分子 x^2-2x-3 と分母 $2x^2-5x-3$ とを因数分解する：

$$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3), \quad 2x^2-5x-3 = (x-3)(2x+1).$$

分母と分子とで共通の因数 $(x-3)$ を約す：

$$\frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3} = \frac{(x+1)(x-3)}{(2x+1)(x-3)} = \frac{x+1}{2x+1}.$$

終

問題 2.7.2 以下の分数式について、約分できるならば約分しなさい。

$$(1) \frac{y^2-5y+6}{3y^2-4y-4} \quad (2) \frac{2t^2-11t-6}{t^3-4t^2-12t}.$$

分数式の分母または分子の中にまた分数式が現れることがあります。そのような分数式を繁分数式といいます。繁分数式は公式 $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ を用いて簡単にします。

例題 分数式 $\frac{x-2}{2+\frac{x+3}{x-1}}$ を計算して簡単にする。

分母の中の分数式の分母を払うために、分子と分母との両方に $x-1$ を掛ける。

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2+\frac{x+3}{x-1}} &= \frac{(x-2)(x-1)}{\left(2+\frac{x+3}{x-1}\right)(x-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)+\frac{x+3}{x-1}(x-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2x-2+x+3} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{3x+1}. \end{aligned}$$

終

問題 2.7.3 分数式 $\frac{x+4}{3-\frac{4x-5}{2x+1}}$ を計算して簡単にしなさい。

例題 分数式 $\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}}{4x+5}$ を計算して簡単にする。

分子の中の分数式 $\frac{2}{x}$ と $\frac{3}{x-2}$ との分母を払うために、分子と分母との両方に $x(x-2)$ を掛ける。

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}}{4x+5} &= \frac{x(x-2)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}\right)}{x(x-2)(4x+5)} \\ &= \frac{x(x-2)\frac{2}{x}+x(x-2)\frac{3}{x-2}}{x(x-2)(4x+5)} = \frac{2(x-2)+3x}{x(x-2)(4x+5)} \\ &= \frac{5x-4}{x(x-2)(4x+5)}. \end{aligned}$$

終

問題 2.7.4 分数式 $\frac{\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x}}{x^2+4}$ を計算して簡単にしなさい。