§2.8 有理式の計算

分母分子が整式である分数と等しくなる式を**有理式**といいます． 例えば，

$$x^2-3x+4=\frac{x^2-3x+4}{1}$$

なので，x の整式 x^2-3x+4 は有理式です． 一般的に，任意の整式 A は，分数 $\dfrac{A}{1}$ と等しいので有理式です． また例えば，

$$x+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)+7}{x-3}=\frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので，式 $x+\dfrac{7}{x-3}$ は有理式です．

有理式は数の種類でいうと有理数に相当します．

有理数とは分母分子が整数である分数で表わせる数のこと

であるのに対して，

有理式とは分母分子が整式である分数で表わせる式のこと

です．

有理式の加法・減法・乗法・除法について考えます．

分母が同じ分数どうしの和・差は，例えば次のように計算しました：

$$\frac{8}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8+5}{7}=\frac{13}{7}\,,\qquad \frac{8}{7}-\frac{5}{7}=\frac{8-5}{7}=\frac{3}{7}\,.$$

分母が同じ分数式どうしの和・差も，同じように，次のように計算できます：整式 A,B,C について， $C\neq 0$ のとき

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}\,,\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}\,.$$

$\boxed{\text{例}}$ 有理式 $\dfrac{5y-3}{y^2-2y+3}-\dfrac{2y+1}{y^2-2y+3}$ を計算します：

$$\frac{5y-3}{y^2-2y+3}-\frac{2y+1}{y^2-2y+3}=\frac{5y-3-(2y+1)}{y^2-2y+3}=\frac{3y-4}{y^2-2y+3}\,.$$

$\boxed{\text{終}}$

分母が異なる分数どうしの和・差の計算では，例えば次のように，分母が元の分数の各々の分母の最小公倍数になるように通分しました：

$$\frac{5}{4}+\frac{7}{6}=\frac{5\times3}{4\times3}+\frac{7\times2}{6\times2}=\frac{15}{12}+\frac{14}{12}=\frac{15+14}{12}=\frac{29}{12}\,.$$

分母が異なる分数式どうしの和・差の計算でも，同様に，公式 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$ を用いて通分します．

$\boxed{\text{例}}$ 有理式 $\dfrac{3}{t-3}+\dfrac{4}{2t+1}$ を計算します：

$$\begin{aligned}\frac{3}{t-3}+\frac{4}{2t+1}&=\frac{3(2t+1)}{(t-3)(2t+1)}+\frac{4(t-3)}{(2t+1)(t-3)}\\&=\frac{3(2t+1)+4(t-3)}{(t-3)(2t+1)}=\frac{6t+3+4t-12}{(t-3)(2t+1)}\\&=\frac{10t-9}{(t-3)(2t+1)}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例題}}$ 有理式 $\dfrac{3x+4}{x^2-x-2}+\dfrac{2x+5}{x^2-5x+6}$ を計算する．

元の式の中の分数の分母 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ と $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ との最小公倍数は $(x+1)(x-2)(x-3)$ である． 分母がこの最小公倍数になるように変形して通分する．

$$\begin{aligned}\frac{3x+4}{x^2-x-2}+\frac{2x+5}{x^2-5x+6}&=\frac{3x+4}{(x+1)(x-2)}+\frac{2x+5}{(x-2)(x-3)}\\&=\frac{(3x+4)(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-3)}+\frac{(x+1)(2x+5)}{(x+1)(x-2)(x-3)}\\&=\frac{3x^2-5x-12+2x^2+7x+5}{(x+1)(x-2)(x-3)}\\&=\frac{5x^2+2x-7}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8.1}}$ 有理式 $\dfrac{3x+5}{x^2-x-6}-\dfrac{x+4}{2x^2-5x-3}$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 有理式 $\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$ を計算する．

元の式の中の分数の分母 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ と $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ との最小公倍数は $(x-1)(x-2)(x+3)$ である． 分母がこの最小公倍数になるように変形して通分する． 約分できるときは約分する．

$$\begin{aligned}\frac{3x-5}{x^2-3x+2}-\frac{2x+1}{x^2+x-6}&=\frac{3x-5}{(x-1)(x-2)}-\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}\\&=\frac{(3x-5)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x+3)}-\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x-2)(x+3)}\\&=\frac{3x^2+4x-15-(2x^2-x-1)}{(x+1)(x-2)(x+3)}\\&=\frac{x^2+5x-14}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{(x-2)(x+7)}{(x-1)(x-2)(x+3)}\\&=\frac{x+7}{(x-1)(x+3)}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8.2}}$ 有理式 $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\dfrac{x+3}{3x^2-7x+2}$ を計算しなさい．

分数どうしの積・商は例えば次のように計算しました：

$$\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{4\times5}{3\times7}=\frac{20}{21}\,,\qquad \frac{4}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{4\times7}{3\times5}=\frac{28}{15}\,.$$

分数式どうしの積・商も同じように計算します：整式 A,B,C,D について，

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}\quad（但し\ B\neq0\,,\ D\neq0\ ）,$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}\quad（但し\ B\neq0\,,\ C\neq0\,,\ D\neq0\ ）.$$

$\boxed{\text{例題}}$ 有理式 $\dfrac{3y-1}{y^2-5y+4}\times\dfrac{y^2-2y-8}{y^2-3y+4}$ を計算する．

$$\begin{aligned}\frac{3y-1}{y^2-5y+4}\times\frac{y^2-2y-8}{y^2-3y+4}&=\frac{(3y-1)(y^2-2y-8)}{(y^2-5y+4)(y^2-3y+4)}\\&=\frac{(3y-1)(y+2)(y-4)}{(y-1)(y-4)(y^2-3y+4)}\\&=\frac{(y+2)(3y-1)}{(y-1)(y^2-3y+4)}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8.3}}$ 有理式 $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}\times\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-4x+5}$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 有理式 $\dfrac{t+2}{t^2-4t+5}\div\dfrac{t^2-2t-8}{t^2-4t+3}$ を計算する．

$$\begin{aligned}\frac{t+2}{t^2-4t+5}\div\frac{t^2-2t-8}{t^2-4t+3}&=\frac{t+2}{t^2-4t+5}\times\frac{t^2-4t+3}{t^2-2t-8}\\&=\frac{(t+2)(t^2-4t+3)}{(t^2-4t+5)(t^2-2t-8)}\\&=\frac{(t+2)(t-1)(t-3)}{(t^2-4t+5)(t+2)(t-4)}\\&=\frac{(t-1)(t-3)}{(t-4)(t^2-4t+5)}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8.4}}$ 有理式 $\dfrac{3y-6}{y^2-3y+4}\div\dfrac{y^2-5y+6}{y^2-4y-5}$ を計算しなさい．

このように，分数式と分数式との和・差・積・商（但し 0 で割る商は除く）は計算して整理すると分数式になります． ですから，有理式と有理式との和・差・積・商はやはり有理式です． つまり，有理式の範囲では四則演算（但し 0 で割る商は除く）が自由にできます．

分数 $\dfrac{23}{5}$ を例にとると，分子 23 を分母 5 で割るときの整商は 4 で 剰余（余り）は 3 なので， $23=5\times4+3$ ですから，

$$\frac{23}{5}=\frac{5\times4+3}{5}=\frac{5\times4}{5}+\frac{3}{5}=4+\frac{3}{5}\,.$$

分数式でも似たような計算をします． x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，分数式 $\dfrac{A}{B}$ の分子の整式 A の次数が分母の整式 B の次数以上であるとします． 分子 A を分母 B で割るときの整商 Q と剰余 R とを求めます． 整商と剰余の定義（2.3節参照）より，

$$A=BQ+R\quad（\,R\ は\ 0\ または\ B\ より次数が低い整式）$$

ですから，

$$\frac{A}{B}=\frac{BQ+R}{B}=\frac{BQ}{B}+\frac{R}{B}=Q+\frac{R}{B}\,.$$

このように，分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき，その分数式を，分子の整式の次数が分母の整式の次数より低い分数式と整式との和または差の形に変形できます．

$\boxed{\text{例題}}$ x の分数式 $\dfrac{2x^2-7x+11}{2x-3}$ を，分子の整式の次数が分母の整式の次数より低い分数式と整式との和または差の形に変形する．

〔解説〕 分子の整式 $2x^2-7x+11$ の次数は分母の整式 $2x-3$ の次数以上なので，分子 $2x^2-7x+11$ を分母 $2x-3$ で割る；このとき整商は $x-2$ になり剰余は 5 になるので，

$$\begin{array}{rr}&x-\ 2\\2x-3\,\big)\!\!\!&\overline{2x^2-7x+11}\\&\underline{2x^2-3x}\\&-4x+11\\&\underline{-4x+\ 6}\\&5\end{array}$$

$$2x^2-7x+11=(2x-3)(x-2)+5\,.$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-7x+11}{2x-3}&=\frac{(2x-3)(x-2)+5}{2x-3}=\frac{(2x-3)(x-2)}{2x-3}+\frac{5}{2x-3}\\&=x-2+\frac{5}{2x-3}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8.5}}$ x の分数式 $\dfrac{6x^2-7x-8}{2x+1}$ を，分子の整式の次数が分母の整式の次数より低い分数式と整式との和または差の形に変形しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ x の分数式 $\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^2-2}$ を，分子の整式の次数が分母の整式の次数より低い分数式と整式との和または差の形に変形する．

〔解説〕 分子の整式 $2x^3-3x^2+1$ の次数は分母の整式 x^2-2 の次数以上なので，分子 $2x^3-3x^2+1$ を分母 x^2-2 で割る；このとき整商は $2x-3$ になり剰余は $4x-5$ になるので，

$$\begin{array}{rr}&2x-3\\x^2-2\,\big)\!\!\!&\overline{2x^3-3x^2\qquad+1}\\&\underline{2x^2\qquad-4x}\\&-3x^2+4x+1\\&\underline{-3x^2\qquad+6}\\&4x-5\end{array}$$

$$2x^3-3x^2+1=(2x-3)(x^2-2)+4x-5\,.$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2-2}&=\frac{(2x-3)(x^2-2)+4x-5}{x^2-2}=\frac{(2x-3)(x^2-2)}{x^2-2}+\frac{4x-5}{x^2-2}\\&=2x-3+\frac{4x-5}{x^2-2}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8.6}}$ x の分数式 $\dfrac{6x^3-3x^2+5}{3x^2+2}$ を，分子の整式の次数が分母の整式の次数より低い分数式と整式との和または差の形に変形しなさい．