

§ 2.9 無理式の計算

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字が現れる式を無理式ということがあります。無理式の計算では以下のことが基本になります：定理 1.8.2 と定理 1.7.1 とより、各実数 a について、

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases};$$

例題 実数 x について $x \leq 5$ とする。 x を含む式 $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ を簡単にする。

【注意】 各実数 A について、 $A \geq 0$ のときに限り $\sqrt{A^2} = A$ 。

【解説】 各実数 a について $a^2 = (-a)^2$ なので、

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = \{-(x - 5)\}^2 = (5 - x)^2.$$

$x \leq 5$ より $5 - x \geq 0$ なので、

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(5 - x)^2} = 5 - x. \quad \text{終}$$

問題 2.9.1 実数 x について $x \leq \frac{3}{2}$ とします。 x を含む式 $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ を簡単にしなさい。

定理 1.6.5 より、各実数 a, b について、 $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ のとき、

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{但し } b \neq 0).$$

例題 実数 a について $a \geq 2$ とする。 次の式を計算して簡単にする：

$$(3 + \sqrt{a - 2})(5 - 2\sqrt{a - 2}).$$

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{a - 2})(5 - 2\sqrt{a - 2}) &= 3(5 - 2\sqrt{a - 2}) + \sqrt{a - 2}(5 - 2\sqrt{a - 2}) \\ &= 15 - 6\sqrt{a - 2} + 5\sqrt{a - 2} - 2\sqrt{a - 2}^2 \\ &= 15 - 6\sqrt{a - 2} + 5\sqrt{a - 2} - 2(a - 2) \\ &= 19 - 2a - \sqrt{a - 2}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 2.9.2 実数 s について次の式を計算して簡単にしなさい：

$$(5 + \sqrt{s^2 + 4})(3 - 2\sqrt{s^2 + 4}).$$

例題 実数 a について次の式を計算して簡単にする：
$$\frac{\sqrt{a^2 + 3} - a}{\sqrt{a^2 + 3} + a}.$$

分子と分母とに $\sqrt{a^2 + 3} - a$ を掛ける。

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 + 3} - a}{\sqrt{a^2 + 3} + a} &= \frac{(\sqrt{a^2 + 3} - a)(\sqrt{a^2 + 3} - a)}{(\sqrt{a^2 + 3} + a)(\sqrt{a^2 + 3} - a)} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + 3}^2 - 2a\sqrt{a^2 + 3} + a^2}{\sqrt{a^2 + 3}^2 - a^2} \\ &= \frac{a^2 + 3 - 2a\sqrt{a^2 + 3} + a^2}{a^2 + 3 - a^2} \\ &= \frac{2a^2 + 3 - 2a\sqrt{a^2 + 3}}{3}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 2.9.3 実数 a について $a \geq 3$ とします。 次の式を計算して簡単にしなさい：

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{a - \sqrt{a^2 - 9}}.$$