§3.1　方程式の意味

変数 x に関する**方程式** (equation) とは，x に関する条件を表す等式のことです．つまり，変数 x に関する述語を表す等式によって x の値を制限するとき，その等式を x に関する方程式といいます． 変数 x に関する方程式において x を未知数ということがあります． 変数 x に関する方程式が成り立つような x の値をその方程式の**解** (solution) といいます．

$\boxed{\text{例}}$　変数 x が現れる等式 $x^3 = 3x^2 - 4$ を x に関する方程式と考えると，この方程式の解とは， $x^3 = 3x^2 - 4$ となる x の値のことです． $x = 2$ としてみると，

$$x^3 = 2^3 = 8 \ , \qquad 3x^2 - 4 = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 \ ,$$

よって $x^3 = 3x^2 - 4$ ；従って 2 は方程式 $x^3 = 3x^2 - 4$ の解です． $x = 1$ としてみると，

$$x^3 = 1^3 = 1 \ , \qquad 3x^2 - 4 = 3 \cdot 1^2 - 4 = -1 \ ,$$

よって $x^3 \neq 3x^2 - 4$ ；従って 1 は方程式 $x^3 = 3x^2 - 4$ の解ではありません．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.1}}$　$0, 1, -1, 2, -2$ のうちで，変数 x に関する方程式 $x^4 - 2 = 2x^2 + 3x$ の解であるものを総て挙げなさい．

方程式の解を求めることをその方程式を解くといいます． そして，変数 x に関する方程式を解く際，変数 x をその方程式の未知数といいます． 方程式の解は1つだけとは限りません． 方程式が複数の解を持つ場合，その方程式を解けといわれると，原則として総ての解を求めなければなりません．

$\boxed{\text{例解}}$　変数 x に関する1次方程式 $2x - 6 = 0$ 解きます． $2x - 6 = 0$ とすると，$2x = 6$ なので $x = 3$ ；つまり，等式 $2x - 6 = 0$ から等式 $x = 3$ が導かれます． 従って方程式 $2x - 6 = 0$ の解は 3 以外にはありません． 逆に， $x = 3$ とすると $2x - 6 = 2 \cdot 3 - 6 = 0$ ですから，実際に 3 は方程式 $2x - 6 = 0$ の解です． 故に，方程式 $2x - 6 = 0$ の解は 3 だけです． このように，方程式 $2x - 6 = 0$ の解が 3 だけであることを示すためには，

$2x - 6 = 0$ から $x = 3$ が導かれ， $x = 3$ から $2x - 6 = 0$ が導かれる

ことを示さなければなりません；つまり，等式 $2x - 6 = 0$ と等式 $x = 3$ とが同値であることを示さなければなりません．　$\boxed{\text{終}}$

このように考えると，方程式を解くとはその方程式と同値な述語で最も簡単なものを求めることです．

複数の変数に関する方程式を考えることもあります． 例えば2つの変数 x と y とが現れる等式について，その等式が成り立つような x の値と y の値とを考えるとき，その等式を x と y とに関する（x, y についての）方程式といいます． x と y とに関する方程式では未知数は2つあることになります． 未知数が2つ現われる方程式を2元方程式ということがあります． 一般に，未知数が n 個現れる方程式を n 元方程式ということがあります．

変数 x に関する方程式を解く際には，x の値を例えば実数の範囲で考えるのか例えば複素数の範囲で考えるのか断ることが必要です．