§3.10　恒等式

例として x の整式 $(x-2)(2x-3)$ を展開します：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 .$$

ここで，文字 x が現れるこの等式は，x の値が何であっても $(x-2)(2x-3) = 2x^2-7x+6$ となることを意味します．

このように，例えば文字 x が現れる等式について，x の値が何であってもその等式が成り立つ（と考える）とき，その等式を x に関する（x についての）**恒等式**といいます．

$\boxed{\text{例}}$　x の3次式 $2x^3-5x^2+7x-8$ を2次式 x^2-x+3 で割ると整商が $2x-3$ で剰余が $-2x+1$ になります．このことを式で表すと次の等式になります：

$$2x^3-5x^2+7x-8 = (2x-3)(x^2-x+3) - 2x + 1 .$$

この等式は，

x の値が何であっても　$2x^3-5x^2+7x-8 = (2x-3)(x^2-x+3) - 2x + 1$

となることを意図しています；つまり x に関する恒等式です．　$\boxed{\text{終}}$

方程式も恒等式も等式ですが，対照的な概念です．

x に関する方程式とは x の値がある条件を満たすときに成り立つ等式

のことで，

x に関する恒等式とは x の値が何であっても成り立つ等式

のことです．

$\boxed{\text{例解}}$　定数 a, b について，等式 $ax+b = 2x+3$ が x に関する恒等式になるとします．つまり，

$$x \text{ の値が何であっても}\quad ax+b = 2x+3$$

とします．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=0$ とすると，

$$a\cdot 0 + b = 2\cdot 0 + 3 ,$$

つまり $b=3$．等式 $ax+b=2x+3$ において $x=1$ とすると，

$$a\cdot 1 + b = 2\cdot 1 + 3 ,$$

つまり $a+b=5$．このことと $b=3$ とより，$a+3=5$，$a=2$．こうして次のことが分かります：

等式 $ax+b=2x+3$ が x に関する恒等式　ならば　$a=2$ かつ $b=3$．

逆に，$a=2$ かつ $b=3$ のとき，明らかに，

$$\text{任意の数 } x \text{ について}\quad ax+b = 2x+3$$

です；つまり，このとき等式 $ax+b=2x+3$ は x に関する恒等式です：

$a=2$ かつ $b=3$　ならば　等式 $ax+b=2x+3$ は x に関する恒等式．

以上のことをまとめる：

$$ax+b=2x+3 \text{ が } x \text{ に関する恒等式} \iff a=2 \text{ かつ } b=3 .$$　$\boxed{\text{終}}$

この例を一般化すると次の定理が証明できます．

> **定理 3.10.1**　a, b, p, q は定数とする．高々1次の x の整式 $ax+b$ と $px+q$ とについて，
>
> 等式 $ax+b=px+q$ が x に関する恒等式 $\iff$ $a=p$ かつ $b=q$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　等式 $a(x+2)+b(x-3) = 3x+16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b との値を定める．

〔方針〕左辺を x について整理して定理3.10.1を用いる．

〔解説〕左辺を x について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3) = (a+b)x + 2a - 3b .$$

従って，等式

$$(a+b)x + 2a - 3b = 3x + 16$$

が x に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a+b=3 \text{ かつ } 2a-3b=16 .$$

これらの a と b とに関する方程式を解くと，$a=5$，$b=-2$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.10.1}}$　等式 $a(2x-3)+b(x+4) = 4x-17$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b との値を定めなさい．

高々2次の整式についても同様のことが成り立ちます．

> **定理 3.10.2**　a, b, c, p, q, r は定数とする．高々2次の x の整式 ax^2+bx+c と px^2+qx+r とについて，
>
> 等式 $ax^2+bx+c = px^2+qx+r$ が x に関する恒等式
>
> $\iff$ $a=p$ かつ $b=q$ かつ $c=r$ ．

この定理の証明は後にします．

$\boxed{\text{例題}}$　等式 $2x^2-3x-1 = (x-1)(ax+b)+c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める．

〔方針〕右辺を x について整理して定理3.10.2を用いる．

〔解説〕右辺を x について整理すると

$$(x-1)(ax+b)+c = ax^2+bx-ax-b+c = ax^2+(b-a)x+c-b .$$

従って，等式

$$2x^2-3x-1 = ax^2+(b-a)x+c-b$$

が x に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a=2 \text{ かつ } b-a=-3 \text{ かつ } c-b=-1 .$$

これらの a, b, c に関する方程式を解くと，$a=2$，$b=-1$，$c=-2$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.10.2}}$　等式 $2x^2-5 = ax(x-1)+b(x-1)+c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　等式 $2x^2-4x+7 = a(x+p)^2+q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める．

〔方針〕右辺を x について整理して定理3.10.2を用いる．

〔解説〕右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2+q = ax^2+2apx+ap^2+q .$$

従って，等式

$$2x^2-4x+7 = ax^2-2apx+ap^2+q .$$

が x に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a=2 \text{ かつ } 2ap=-4 \text{ かつ } ap^2+q=7 .$$

a, p, q に関するこれらの方程式より，

$$a=2 , \qquad p=\frac{4}{-2a}=-1 , \qquad q=7-ap^2=5 .$$

つまり，$a=2$，$p=-1$，$q=5$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.10.3}}$　等式 $2x^2-6x+7 = a(x+p)^2+q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定めなさい．

等式に現れる複数の文字に着目することもあります．例えば等式に現れる文字 x と y とに着目すると，x と y との値が何であってもその等式が成り立つ（と考える）とき，その等式を x と y とに関する恒等式といいます．

――――　定理の証明

補助定理　a, b, c は x と無関係な定数とする．高々2次の x の整式 ax^2+bx+c について，等式 $ax^2+bx+c=0$ が x に関する恒等式ならば $a=b=c=0$．

証明　まず，等式 $ax^2+bx+c=0$ が x に関する恒等式であると仮定する．つまり，

$$\text{任意の数 } x \text{ について}\quad ax^2+bx+c=0$$

とする．恒等式 $ax^2+bx+c=0$ において $x=0$ とすると，

$$c=0 . \tag{1}$$

恒等式 $ax^2+bx+c=0$ において $x=1$ とすると，

$$a+b+c=0 . \tag{2}$$

恒等式 $ax^2+bx+c=0$ において $x=-1$ とすると，

$$a-b+c=0 . \tag{3}$$

a, b, c に関する方程式 (1), (2), (3) より $a=b=c=0$．　（証明終り）

定理　a, b, c, p, q, r は x と無関係な定数とする．高々2次の x の整式 ax^2+bx+c と px^2+qx+r とについて，

等式 $ax^2+bx+c = px^2+qx+r$ が x に関する恒等式

$\iff$ $a=p$ かつ $b=q$ かつ $c=r$ ．

証明　まず，等式 $ax^2+bx+c = px^2+qx+r$ が x に関する恒等式であると仮定する．移項すると $ax^2+bx+c-(px^2+qx+r)=0$，左辺を整理すると

$$(a-p)x^2+(b-q)x+c-r=0 ;$$

この等式が x に関する恒等式である．従って，補助定理より $a-p=b-q=c-r=0$．故に，$a=p$，$b=q$，$c=r$．

逆に，$a=p$，$b=q$，$c=r$ と仮定する．このとき，明らかに，

$$\text{任意の数 } x \text{ について}\quad ax^2+bx+c = px^2+qx+r .$$

つまり，等式 $ax^2+bx+c = px^2+qx+r$ は x に関する恒等式である．

（証明終り）