

§3.2 2次方程式の解法

変数 x に関する2次方程式とは次の形に整理できる等式のことです：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a \neq 0).$$

係数が実数である2次方程式を解くことを考えます。そのために次のような式変形が重要になります： x の2次式 $x^2 \pm \square x$ (\square は x の係数) に $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を加えて、乗法公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (複号同順) を適用すると、

$$x^2 \pm \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 \pm 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{\square}{2}\right)^2 \quad (\text{複号同順}).$$

定理1.8.2を思い起こして下さい：

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } a = \sqrt{a^2}.$$

定理1.3.2は複素数についてもそのまま成り立ちます：任意の複素数 α と β について、

$$\alpha^2 = \beta^2 \iff \alpha = \pm\beta.$$

例解 複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解きます。まず x^2 の係数を1にするために両辺を2で割ります：

$$x^2 + 5x + \frac{9}{2} = 0.$$

両辺から $\frac{9}{2}$ を引くと

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2}.$$

等式の左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にします。そのために x の係数5の $\frac{1}{2}$ の2乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足します：

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

するとこの等式の左辺は $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ で、右辺は $-\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$ ですから、

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

定理1.8.2より $\frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}}^2$ なので、

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2.$$

定理1.3.2より、

$$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

両辺から $\frac{5}{2}$ を引くと

$$x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{2} = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff x^2 + 5x + \frac{9}{2} = 0 \\ &\iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 \\ &\iff x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}} \\ &\iff x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &\iff x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

故に、 x に関する方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解くと $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$. 終

2次方程式の解は虚数になることもあります。1.8節において負の数の根号の定義を述べました：実数 a について、 $a < 0$ のとき $\sqrt{a} = \sqrt{-a}i$.

例解 複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解きます。まず x^2 の係数を1にするために両辺を4で割って

$$x^2 - 3x + \frac{29}{4} = 0,$$

両辺から $\frac{29}{4}$ を引いて

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4}.$$

等式の左辺を $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にするために、両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ を足します：

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4},$$

左辺は $x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ で、右辺は定理1.8.2より $-\frac{29}{4} + \frac{9}{4} = -5 = \sqrt{-5}^2$ ですから、

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2.$$

定理1.3.2より

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{-5};$$

1.8節で述べたように $\sqrt{-5} = \sqrt{-(-5)}i = \sqrt{5}i$ ですから、

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i,$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i.$$

このように等式 $2x^2 - 6x + \frac{29}{2} = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 29 = 0 &\iff x^2 - 3x + \frac{29}{4} = 0 \\ &\iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \\ &\iff x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -5 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2 \\ &\iff x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{-5} \\ &\iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i. \end{aligned}$$

つまり x に関する方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解くと $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$. 終

実は、このような方法で2次方程式を解くとき、導かれる等式は総て元の方程式と同値です。ですから導かれた結果は元の方程式と同値です。

例題 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く。

方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ より、

$$5x^2 + 6x = 2,$$

$$x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5},$$

$$x^2 + \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25},$$

$$\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\frac{19}{25}}^2,$$

$$x + \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} = \pm\frac{\sqrt{19}}{5},$$

故に $x = -\frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$. 終

問題 3.2.1 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ を解きなさい。

例題 複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + 34 = 10x$ を解く。

方程式 $x^2 + 34 = 10x$ より、

$$x^2 - 10x = -34,$$

$$x^2 - 10x + 25 = -9,$$

$$(x - 5)^2 = \sqrt{-9}^2,$$

$$x - 5 = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}i = \pm 3i,$$

故に $x = 5 \pm 3i$. 終

問題 3.2.2 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 + \frac{20}{3} = 8x$ を解きなさい。

2次方程式を解くには2次式を因数分解して定理1.1.1を直接用いることもあります。

例題 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く。

【解説】 x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する：

$$x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = (3x + 6)k + x^2 - 2x - 8 = 3(x + 2)k + (x + 2)(x - 4)$$

$$= (x + 2)(3k + x - 4) = (x + 2)(x + 3k - 4).$$

従って、定理1.1.1を用いると、

$$x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0 \iff (x + 2)(x + 3k - 4) = 0$$

$$\iff x + 2 = 0 \text{ または } x + 3k - 4 = 0$$

$$\iff x = -2 \text{ または } x = -3k + 4.$$

つまり、 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ の解は -2 と $-3k + 4$. 終

問題 3.2.3 実数を表す定数 a に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 = (4a + 1)x - 6a + 3$ を解きなさい。