§3.2　2次方程式の解法

変数 x に関する2次方程式とは次の形に整理できる等式のことです：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (\ a,b,c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a\neq 0\ ) .$$

係数が実数である2次方程式を解くことを考えます． そのために次のような式変形が重要になります： x の2次式 $x^2\pm\square x$ （$\pm\square$ は x の係数） に $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を加えて，乗法公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ （複号同順）を適用すると，

$$x^2\pm\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2\pm 2\cdot\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x\pm\frac{\square}{2}\right)^2 \qquad \text{（複号同順）}.$$

定理1.8.2を思い起こして下さい：

$$\text{任意の実数 } a \text{ について } a=\sqrt{a}^{\,2} .$$

定理1.3.2は複素数についてもそのまま成り立ちます：任意の複素数 α と β とについて，

$$\alpha^2=\beta^2 \iff \alpha=\pm\beta .$$

$\boxed{\text{例解}}$　複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解きます． まず x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割ります：

$$x^2+5x+\frac{9}{2}=0 .$$

両辺から $\frac{9}{2}$ を引くと

$$x^2+5x=-\frac{9}{2} .$$

等式の左辺を $x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にします． そのために x の係数 5 の $\frac{1}{2}$ の2乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足します：

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2 ,$$

するとこの等式の左辺は $x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ で，右辺は $-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\frac{25}{4}=\frac{7}{4}$ ですから，

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4} .$$

定理1.8.2より $\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2}$ なので，

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2} .$$

定理1.3.2より，

$$x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} .$$

両辺から $\frac{5}{2}$ を引くと

$$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{5}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{7}}{2}=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2} .$$

このように等式 $2x^2+10x+9=0$ から等式 $x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ が導かれて，この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned}
2x^2+10x+9=0 &\iff x^2+5x+\frac{9}{2}=0\\
&\iff x^2+5x=-\frac{9}{2}\\
&\iff x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\\
&\iff x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\\
&\iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{7}{4}}^{\,2}\\
&\iff x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}\\
&\iff x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\\
&\iff x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2} .
\end{aligned}$$

故に，x に関する方程式 $2x^2+10x+9=0$ を解くと $x=-\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$.　$\boxed{\text{終}}$

　2次方程式の解は虚数になることもあります． 1.8節において負の数の根号の定義を述べました：実数 a について，$a<0$ のとき $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$.

$\boxed{\text{例解}}$　複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解きます． まず x^2 の係数を 1 にするために両辺を 4 で割って

$$x^2-3x+\frac{29}{4}=0 ,$$

両辺から $\frac{29}{4}$ を引いて

$$x^2-3x=-\frac{29}{4} .$$

等式の左辺を $x^2-\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x-\frac{\square}{2}\right)^2$ のような形にするために，両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ を足します：

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{4}+\frac{9}{4} ,$$

左辺は $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ で，右辺は定理1.8.2より $-\frac{29}{4}+\frac{9}{4}=-5=\sqrt{-5}^{\,2}$ ですから，

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{-5}^{\,2} .$$

定理1.3.2より

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{-5} ;$$

1.8節で述べたように $\sqrt{-5}=\sqrt{-(-5)}\,i=\sqrt{5}\,i$ ですから，

$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{5}\,i ,$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i .$$

このように等式 $2x^2-6x+\frac{29}{2}=0$ から等式 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$ が導かれて，この間に現れる等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned}
4x^2-12x+29=0 &\iff x^2-3x+\frac{29}{4}=0\\
&\iff x^2-3x=-\frac{29}{4}\\
&\iff x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&\iff x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-5\\
&\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{-5}^{\,2}\\
&\iff x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{-5}\\
&\iff x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i .
\end{aligned}$$

つまり x に関する方程式 $4x^2-12x+29=0$ を解くと $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{5}\,i$.　$\boxed{\text{終}}$

　実は，このような方法で2次方程式を解くとき，導かれる等式は総て元の方程式と同値です． ですから導かれた結果は元の方程式と同値です．

$\boxed{\text{例題}}$　複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2=2-6x$ を解く．

　方程式 $5x^2=2-6x$ より，

$$5x^2+6x=2 ,$$
$$x^2+\frac{6}{5}x=\frac{2}{5} ,$$
$$x^2+\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{5}+\frac{9}{25}=\frac{19}{25} ,$$
$$\left(x+\frac{3}{5}\right)^2=\sqrt{\frac{19}{25}}^{\,2} ,$$
$$x+\frac{3}{5}=\pm\sqrt{\frac{19}{25}}=\pm\frac{\sqrt{19}}{5} ,$$

故に $x=-\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.1}}$　複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2=1-5x$ を解きなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^2+34=10x$ を解く．

　方程式 $x^2+34=10x$ より，

$$x^2-10x=-34 ,$$
$$x^2-10x+25=-9 ,$$
$$(x-5)^2=\sqrt{-9}^{\,2} ,$$
$$x-5=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i=\pm 3i ,$$

故に $x=5\pm 3i$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.2}}$　複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2+\frac{20}{3}=8x$ を解きなさい．

　2次方程式を解くには2次式を因数分解して定理1.1.1を直接用いることもあります．

$\boxed{\text{例題}}$　実数を表す定数 k に対して，実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ を解く．

〔解説〕 x の2次式 $x^2+(3k-2)x+6k-8$ は k についてみると高々1次の式なので，k について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}
x^2+(3k-2)x+6k-8 &= (3x+6)k+x^2-2x-8=3(x+2)k+(x+2)(x-4)\\
&= (x+2)(3k+x-4)=(x+2)(x+3k-4) .
\end{aligned}$$

従って，定理1.1.1を用いると，

$$\begin{aligned}
x^2+(3k-2)x+6k-8=0 &\iff (x+2)(x+3k-4)=0\\
&\iff x+2=0 \text{ または } x+3k-4=0\\
&\iff x=-2 \text{ または } x=-3k+4 .
\end{aligned}$$

つまり，x に関する方程式 $x^2+(3k-2)x+6k-8=0$ の解は -2 と $-3k+4$.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.2.3}}$　実数を表す定数 a に対して，実数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2=(4a+1)x-6a+3$ を解きなさい．