§3.3 2次方程式の解の公式

2次方程式について，前節で述べた解法によって解の公式が導かれます．

> **定理**（2次方程式の解の公式）　実数を表す定数 a,b,c （ $a\neq 0$ ）について，複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くと $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ．

2次方程式の解の公式を導きます．定数 a,b,c は実数で $a\neq 0$ とします．

複素数を表す変数 x について $ax^2+bx+c=0$ と仮定します．まず両辺から c を引いて両辺を a で割ります：

$$ax^2+bx=-c\ ,$$
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\ .$$

等式の左辺を $x^2+\square x+\left(\dfrac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{\square}{2}\right)^2$ のような形にするために，両辺に $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ を足します：

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\ ;$$

この等式の左辺は $x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ，右辺は

$$-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\ ,$$

よって

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\ .$$

右辺も2乗の形に変形します．定理1.8.2より $b^2-4ac=\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}$ なので，

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{(2a)^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\ ,$$

よって

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\ .$$

定理3.2より

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,$$

従って

$$x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

このように等式 $ax^2+bx+c=0$ から等式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が導かれますが，その途中の等式は元の方程式と同値です：

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 \iff\ & ax^2+bx=-c\\
\iff\ & x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\\
\iff\ & x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
\iff\ & x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
\iff\ & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}^{\,2}\\
\iff\ & x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
\iff\ & x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
\iff\ & x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .
\end{aligned}$$

故に，x に関する方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くと $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ です．

例題　複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2+\sqrt{29}x+3=0$ を解く．

2次方程式の解の公式より

$$x=\frac{-\sqrt{29}\pm\sqrt{\sqrt{29}^{\,2}-4\cdot 2\cdot 3}}{4}=\frac{-\sqrt{29}\pm\sqrt{29-24}}{4}=\frac{-\sqrt{29}\pm\sqrt{5}}{4}\ .$$

よって $x=-\dfrac{\sqrt{29}\pm\sqrt{5}}{4}$ ．　終

1.8節において負の数の根号の定義を述べました：実数 a について，$a<0$ のとき $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$ ．

例題　複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2=5x-4$ を解く．

方程式 $3x^2=5x-4$ を整理すると $3x^2-5x+4=0$ ．2次方程式の解の公式より，

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-48}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{-23}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{-(-23)}\,i}{6}=\frac{5\pm\sqrt{23}\,i}{6}\ .$$

終

問題 3.3.1　複素数を表す変数 x に関する以下の方程式を解きなさい．

(1) $2(x^2+3)=3\sqrt{7}x$ ．　(2) $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{2}+2x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ．　(3) $(x+1)(3x+1)=-2$ ．

定数 a,b,c は実数で $a\neq 0$ とします．複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をなるべく簡単に計算するために，できるならば，根号の中の b^2 と $4ac$ とが絶対値が小さい整数になるように予め方程式を変形します．

例題　複素数を表す変数 x に関する方程式 $9x^2-30x+19=0$ を解く．まず両辺を 6 で割る．

与えられた方程式の両辺を 6 で割ると $\dfrac{3}{2}x^2-5x+\dfrac{19}{6}=0$ ；2次方程式の解の公式より

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{19}{6}}}{2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{5\pm\sqrt{25-19}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{6}}{3}\ .$$

終

問題 3.3.2　複素数を表す変数 x に関する方程式 $25x^2-70x+46=0$ を解きなさい．まず両辺を 10 で割りなさい．

特に，定数 a,c が整数で $a\neq 0$ で，定数 b が偶数であるとき，複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は次のようになります：$b'=\dfrac{b}{2}$ は整数なので，両辺を 2 で割ると $\dfrac{a}{2}x^2+b'x+\dfrac{c}{2}=0$ ，解の公式より

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{c}{2}}}{2\cdot\frac{a}{2}}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\ .$$

係数に文字が含まれる方程式を解きます．

例題　実数を表す定数 a に対して，複素数を表す変数 x に関する方程式 $(x+a)^2=a^2+3$ を解く．

方程式 $(x+a)^2=a^2+3$ を整理すると $x^2+2ax-3=0$ ．解の公式より，

$$\begin{aligned}
x&=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+12}}{2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4(a^2+3)}}{2}=\frac{-2a\pm 2\sqrt{a^2+3}}{2}\\
&=-a\pm\sqrt{a^2+3}\ .
\end{aligned}$$

終

問題 3.3.3　実数を表す定数 k に対して，複素数を表す変数 x に関する方程式 $x^2-2x=k(x-1)$ を解きなさい．