§3.4　2次方程式の判別式

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とします．便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおきます．

前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad と \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad と$$

です．そこで，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には本来2つの解 $\dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とがあると考えます． $\dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は一つだけですが，これは本来2つある解がたまたま重なって1つになったものと考えます．このようにたまたま1つになるときの解を重解あるいは2重解といいます．

$$\begin{aligned} 2次方程式\ ax^2 + bx + c = 0\ の解が重解である \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &\Longleftrightarrow \quad -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{D} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{D} = 0\ ; \end{aligned}$$

$\sqrt{D} = 0$ ならば， $\sqrt{D}^2 = 0$ ，定理1.8.2より $\sqrt{D}^2 = D$ なので $D = 0$ ．逆に，$D = 0$ ならば $\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$ ．よって

$$\sqrt{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D = 0\ .$$

こうして次のことが分かります：

$$2次方程式\ ax^2 + bx + c = 0\ の解が重解である \quad \Longleftrightarrow \quad D = 0\ .$$

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が重解でないとき，つまり $\dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \neq \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる2つの解を持つといいます．

$$\begin{aligned} &2次方程式\ ax^2 + bx + c = 0\ は異なる2つの解を持つ \\ \Longleftrightarrow\ &2次方程式\ ax^2 + bx + c = 0\ の解は重解でない \\ \Longleftrightarrow\ &D \neq 0\ . \end{aligned}$$

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\ , \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

が実数であるか虚数であるかを考えます． $D \geq 0$ のとき， $\sqrt{D}$ は実数ですから，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解 $\dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ はどちらも実数です．つまり次のようになります：

$D \geq 0$ ならば2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解はどちらも実数である．

$D < 0$ のときは，1.8節で述べた定義より $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$ ですから，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解は

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}\ , \qquad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}\ .$$

$D < 0$ のとき， $-D > 0$ なので， $\sqrt{-D}$ は実数で $\sqrt{-D} \neq 0$ です；従って2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解 $\dfrac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \dfrac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$ はどちらも虚数です[1]．つまり次のようになります：

$D < 0$ ならば2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解はどちらも虚数である．

この述語の対偶（0.6節参照）をとります：

“2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解はどちらも虚数”でなければ $D \not< 0$ ．

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解がどちらも実数ならば，“2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解がどちらも虚数”でないので， $D \not< 0$ つまり $D \geq 0$ です[2]．つまり次のようになります：

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解がどちらも実数であるならば $D \geq 0$ ．

このようにして次のことが分かります：

$D \geq 0 \iff$ 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解はどちらも実数である；

$D < 0 \iff$ 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解はどちらも虚数である．

このように， $D = b^2 - 4ac$ の符号を調べると，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が実数か虚数か，重解かどうか，が分かります．

> **定理3.4**　定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について，
>
> $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる2つの実数解を持つ $\iff b^2 - 4ac > 0$ ，
>
> $ax^2 + bx + c = 0$ が1つの実数解（重解）を持つ $\iff b^2 - 4ac = 0$ ，
>
> $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる2つの虚数解を持つ $\iff b^2 - 4ac < 0$ ．

定数 a, b, c が実数で $a \neq 0$ のとき，複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して $b^2 - 4ac$ を**判別式**といいます．

例題　実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 - 8x + c = 0$ が，異なる2つの実数を解とするか，解が重解であるか，異なる2つの虚数を解とするか，調べる．

(1)　$c = 5$ のとき．　　　(2)　$c = 7$ のとき．

〔解答〕

(1)　$c = 5$ のとき，方程式は $3x^2 - 8x + 5 = 0$ ，この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 > 0$ ．故に $c = 5$ のとき与えられた方程式は異なる2つの実数を解とする．

(2)　$c = 7$ のとき，方程式は $3x^2 - 8x + 7 = 0$ ，この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 64 - 84 < 0$ ．故に $c = 7$ のとき与えられた方程式は異なる2つの虚数を解とする．

終

問題3.4　実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに，複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が，異なる2つの実数を解とするか，解が重解であるか，異なる2つの虚数を解とするか，調べなさい．

(1)　$b = 5$ のとき．　　(2)　$b = 8$ のとき．　　(3)　$b = 9$ のとき．

---

1) 実数 a と b とについて， $b \neq 0$ のとき複素数 $a + ib$ は虚数です（定理1.9.3）．

2) 任意の実数 a と b とについて， $a \not< b \iff a \geq b$ （法則1.5.2）．