

§ 3.5 2次式の因数分解

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とします. 前節で述べたように, 複素数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には2つの解 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ とがあります. これら2つの解の和と積とを計算してみます. まず, 2つの解の和は
$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

2つの解の積は, 定理 3.2.2 より $\sqrt{b^2 - 4ac}^2 = b^2 - 4ac$ なので,
$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \cdot 2a} = \frac{(-b)^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

こうして次のことが分かります: 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α と β とおくと,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

このことは a, b, c が虚数であってもそのまま成り立ちます.

定理 (2次方程式の解と係数の関係) 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α と β とおくと,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

この定理より次の定理が導かれます.

定理 (2次式の因数分解の公式) 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す定数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α と β とおくと, x の2次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

証明 x の2次式 $ax^2 + bx + c$ を a で括ると

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

2次方程式の解と係数の関係 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ より

$$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta), \quad \frac{c}{a} = \alpha\beta,$$

従って

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x - \alpha)(x - \beta).$$

故に

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

(証明終り)

この定理によると, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が分かれば, 2次式 $ax^2 + bx + c$ が1次式の積に因数分解できます. 2次方程式はいつも複素数の解を持ちますから, 2次式は係数が複素数の範囲で必ず1次式の積の形に因数分解できます.

例題 係数が実数の範囲で x の2次式 $3x^2 + 9x + 5$ を因数分解する.

【方針】 実数の範囲で x に関する2次方程式 $3x^2 + 9x + 5 = 0$ を解いて, 2次式の因数分解の公式を用いる.

【解説】 実数を表す変数 x に関する2次方程式 $3x^2 + 9x + 5 = 0$ を解く. 解の公式より,

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 60}}{6} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{6} = -\frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}.$$

2次方程式 $3x^2 - 9x + 5 = 0$ の解は $-\frac{9 + \sqrt{21}}{6}$ と $-\frac{9 - \sqrt{21}}{6}$ となので, x の2次式 $3x^2 - 9x + 5$ は次のように因数分解できる:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 9x + 5 &= 3\left\{x - \left(-\frac{9 + \sqrt{21}}{6}\right)\right\}\left\{x - \left(-\frac{9 - \sqrt{21}}{6}\right)\right\} \\ &= 3\left(x + \frac{9 + \sqrt{21}}{6}\right)\left(x + \frac{9 - \sqrt{21}}{6}\right). \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 3.5.1 係数が実数の範囲で以下の x の2次式を因数分解しなさい.

- (1) $2x^2 - 6x + 3$. (2) $\frac{1}{2}x^2 + x - 3$.

例題 係数が複素数の範囲で t の2次式 $2t^2 - 6t + 5$ を因数分解する.

【解説】 複素数を表す変数 t に関する2次方程式 $2t^2 - 6t + 5 = 0$ を解く. $t^2 - 3t + \frac{5}{2} = 0$ なので, 解の公式より,

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 10}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{3 \pm i}{2}.$$

2次方程式 $2t^2 - 6t + 5 = 0$ の解は $\frac{3+i}{2}$ と $\frac{3-i}{2}$ となので,

$$2t^2 - 6t + 5 = 2\left(t - \frac{3+i}{2}\right)\left(t - \frac{3-i}{2}\right). \quad \text{終}$$

問題 3.5.2 係数が複素数の範囲で以下の x の2次式を因数分解しなさい.

- (1) $3x^2 - 8x + 7$. (2) $2x^2 + 4x + \frac{5}{2}$.

例題 係数が複素数の範囲で x の3次式 $2x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ を因数分解する.

【解説】 $x = 2$ のとき $2x^3 - 2x^2 - 5x + 2 = 0$ なので, 因数定理より, $2x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ は $x - 2$ で割り切れる. 実際に割ると商は $2x^2 + 2x - 1$ になるので,

$$2x^3 - 2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x^2 + 2x - 1).$$

複素数を表す変数 x に関する2次方程式 $2x^2 + 2x - 1 = 0$ つまり $x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$ を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-2)}}{2} = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

2次方程式 $2x^2 + 2x - 1 = 0$ の解は $-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ と $-\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ となので,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 1 &= 2\left\{x - \left(-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{x - \left(-\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\ &= 2\left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2 &= (x - 2)(2x^2 - 2x - 1) \\ &= (x - 2)2\left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2(x - 2)\left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 3.5.3 係数が複素数の範囲で y の整式 $3y^3 - 3y^2 - 2y + 4$ を因数分解しなさい.

実際には, 多くの場合, 整式の因数分解は係数が実数の範囲で考えます.

係数が実数の2次式の因数分解について, 2次式の因数分解の公式と前節の定理 3.4 とを組み合わせると次の定理が導かれます (証明は省きます).

定理 3.5 定数 a, b, c が実数を表し, $a \neq 0$ のとき,

x の2次式 $ax^2 + bx + c$ が係数が実数の範囲で1次式の積の形に因数分解できる

$$\iff b^2 - 4ac \geq 0.$$