§3.5　2次式の因数分解

　定数 a, b, c は実数を表し　$a \neq 0$　とします．　前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　には2個の解　$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　と　$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　とがあります．　これら2個の解の和と積とを計算してみます．　まず，2個の解の和は

$$
\begin{aligned}
\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}\ .
\end{aligned}
$$

2個の解の積は，定理3.2.2より　$\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}=b^2-4ac$　なので，

$$
\begin{aligned}
\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\cdot 2a} \\
&= \frac{(-b)^2-\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}\ .
\end{aligned}
$$

こうして次のことが分かります：2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の2個の解を　α　と　β　とおくと，

$$
\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ , \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\ .
$$

このことは a, b, c が虚数であってもそのまま成り立ちます．

定理（2次方程式の解と係数の関係）　　定数 a, b, c は複素数を表し　$a \neq 0$　とする．複素数を表す変数 x に関する2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の2個の解を　α　と　β　とおくと，

$$
\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ , \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\ .
$$

　この定理より次の定理が導かれます．

> **定理**（2次式の因数分解の公式）　　定数 a, b, c は複素数を表し　$a \neq 0$　とする．複素数を表す定数 x に関する2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の2個の解を　α　と　β　とおくと，x の2次式 ax^2+bx+c は次のように因数分解できる：
>
> $$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\ .$$

証明　2次方程式の解と係数の関係　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$　より

$$
b=-a(\alpha+\beta)\ , \quad c=a\alpha\beta\ .
$$

これより

$$
ax^2+bx+c=ax^2-a(\alpha+\beta)+a\alpha\beta=a\{x^2-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)\ .
$$

（証明終り）

　この定理によると，2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解が分かれば，2次式　ax^2+bx+c が1次式の積に因数分解できます．　2次方程式はいつも複素数の解を持ちますから，2次式は係数が複素数の範囲で必ず1次式の積の形に因数分解できます．

$\boxed{\text{例題}}$　係数が実数の範囲で x の2次式 $3x^2+9x+5$ を因数分解する．
〔方針〕実数の範囲で x に関する2次方程式　$3x^2+9x+5=0$　を解いて，2次式の因数分解の公式を用いる．
〔解説〕実数を表す変数 x に関する2次方程式　$3x^2+9x+5=0$　を解く．　解の公式より，

$$
x=\frac{-9\pm\sqrt{81-60}}{6}=\frac{-9\pm\sqrt{21}}{6}=-\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}\ .
$$

2次方程式　$3x^2-9x+5=0$　の解は　$-\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$　と　$-\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$　となので，x の2次式 $3x^2-9x+5$ は次のように因数分解できる：

$$
\begin{aligned}
3x^2-9x+5 &= 3\left\{x-\left(-\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)\right\} \\
&= 3\left(x+\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\left(x+\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.5.1}}$　係数が実数の範囲で以下の x の2次式を因数分解しなさい．

(1)　$2x^2-6x+3$．　　　　(2)　$\dfrac{1}{2}x^2+x-3$．

$\boxed{\text{例題}}$　係数が複素数の範囲で t の2次式 $2t^2-6t+5$ を因数分解する．
〔解説〕複素数を表す変数 t に関する2次方程式　$2t^2-6t+5=0$　を解く．$t^2-3t+\dfrac{5}{2}=0$　なので，解の公式より，

$$
t=\frac{3\pm\sqrt{9-10}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{3\pm i}{2}\ .
$$

2次方程式　$2t^2-6t+5=0$　の解は　$\dfrac{3+i}{2}$　と　$\dfrac{3-i}{2}$　となので，

$$
2t^2-6t+5=2\left(t-\frac{3+i}{2}\right)\left(t-\frac{3-i}{2}\right)\ .
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.5.2}}$　係数が複素数の範囲で以下の x の2次式を因数分解しなさい．

(1)　$3x^2-8x+7$．　　　　(2)　$2x^2+4x+\dfrac{5}{2}$．

$\boxed{\text{例題}}$　係数が複素数の範囲で x の3次式 $2x^3-2x^2-5x+2$ を因数分解する．
〔解説〕　$x=2$　のとき　$2x^3-2x^2-5x+2=0$　なので，因数定理より，$2x^3-6x^2+3x+2$ は $x-2$ で割り切れる．　実際に割ると整商は $2x^2+2x-1$ なので，

$$
2x^3-2x^2-5x+2=(x-2)(2x^2+2x-1)\ .
$$

$$
\begin{array}{r}
2x^2+2x-1 \\
x-2\ \big)\ \overline{2x^3-2x^2-5x+2} \\
\underline{2x^3-4x^2} \\
2x^2-5x \\
\underline{2x^2-4x} \\
-\ x+2 \\
\underline{-\ x+2} \\
0
\end{array}
$$

複素数を表す変数　x　に関する2次方程式　$2x^2+2x-1=0$　つまり　$x^2+x-\dfrac{1}{2}=0$　を解くと

$$
x=\frac{-1\pm\sqrt{1-(-2)}}{2}=-\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\ .
$$

2次方程式　$2x^2+2x-1=0$　の解は　$-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　と　$-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$　となので，

$$
\begin{aligned}
2x^2-2x-1 &= 2\left\{x-\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= 2\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\ .
\end{aligned}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
2x^3-6x^2+3x+2 &= (x-2)(2x^2-2x-1) \\
&= (x-2)2\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 2(x-2)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.5.3}}$　　係数が複素数の範囲で　y　の整式　$3y^3-3y^2-2y+4$　を因数分解しなさい．

　係数が実数の2次式の因数分解について，2次式の因数分解の公式と前節の定理3.4とを組み合わせると次の定理が導かれます（証明は省きます）．

定理 3.5　　定数 a, b, c が実数を表し，　$a \neq 0$　のとき，
　x の2次式 ax^2+bx+c が係数が実数の範囲で1次式の積の形に因数分解できる
　$\iff$　$b^2-4ac \geq 0$．