

§3.7 分数方程式

中学校を卒業しないと高専に入学できません¹⁾から、人を表す変数 x について、“ x は高専生である”のであれば“ x は中学校を卒業している”といえます；しかし、逆に“ x は中学校を卒業している”からといって“ x は高専生である”とは限りません。中学校を卒業していても高専生でない人は沢山います。この例のように、 x に関する述語 $A(x)$ から述語 $B(x)$ が導けるが $B(x)$ から $A(x)$ が導けないとき、 $B(x)$ となる x の値の範囲は、 $A(x)$ となる x の値の範囲を含みますが、それ以外の値も含むことがあります。

未知数についての分数式が現れる方程式を分数方程式といいます。分数方程式を解くために等式の次の性質を用います：複素数 a, b, c について、 $a = b$ ならば $ac = bc$ 。

例解 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x}$ を解きます。まず分数式の分母を因数分解します：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)}.$$

方程式の中の分数式の分母を払うために、分数式の分母 $(x+2)(x-2)$ と $x(x-2)$ との最小公倍数 $x(x+2)(x-2)$ を両辺に掛けます²⁾：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2).$$

約分して整理します：

$$\begin{aligned}(x+4)x &= (2x-1)(x+2), \\ x^2+4x &= 2x^2+3x-2, \\ x^2-x-2 &= 0, \\ (x+1)(x-2) &= 0,\end{aligned}$$

従って $x=2$ または $x=-1$ 。故に、

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x} \text{ ならば } x=2 \text{ または } x=-1.$$

ところが、 $x=2$ のとき、 $x^2-4=0$ なので分数式 $\frac{x+4}{x^2-4}$ の値はありません。よつて、 $x=2$ のとき、与えられた方程式 $\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x}$ は成り立ちません³⁾。

複素数を表す式 A, B, C, D について、等式 $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ から等式 $A = C$ を導けますが、逆に $A = C$ から $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ を一般的には導けません⁴⁾。

この例では、等式 $\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2)$ から等式 $(x+4)x = (2x-1)(x+2)$ を導けますが、逆に $(x+4)x = (2x-1)(x+2)$ から $\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2)$ を導けません。よつて、 x に関する方程式 $(x+4)x = (2x-1)(x+2)$ の解の範囲は、方程式 $\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2)$ の解の範囲を含みますが、それ以外の余計なものまで含んでいるかもしれません。従つて、方程式 $(x+4)x = (2x-1)(x+2)$ の解の各々が元の方程式 $\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x}$ の解であるかどうかを調べる必要があります。 終

このように、分数方程式の中の分数式の分母を払ってできる整方程式の解は元の分数方程式の解であるとは限らないので、改めて調べる必要があります。その際、分数式の分母の値が 0 になるとその分数式の値はありません。ですから、

分数方程式の中の分数式の分母の値は 0 でない

ことに注意して下さい。

例題 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1 + \frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く。

【解説】 まず分数式の分母を因数分解する：

$$1 + \frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}.$$

方程式の中の分数式の分母を払うために、分数式の分母 $x-3$ と $(x-1)(x-3)$ との最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3) &= \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3), \\ (x-1)(x-3) + 5(x-1) &= 2x+4, \\ x^2-4x+3+5x-5 &= 2x+4, \\ x^2-x-6 &= 0, \\ (x+2)(x-3) &= 0,\end{aligned}$$

よつて $x=3$ または $x=-2$ 。 $x=-2$ のとき、与えられた方程式の中の分数式の分母は 0 にならない。 $x=3$ のとき、与えられた方程式の中の分数式 $\frac{5}{x-3}$ の分母が 0 になる。よつて、与えられた方程式の解は -2 だけである。 終

問題 3.7 複素数を表す変数 x に関する以下の方程式を解きなさい。

$$(1) \frac{5}{x+3} = \frac{3}{x-1} - 2. \quad (2) \frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-x-2}.$$

¹⁾ 海外で日本の中学校に相当する学校を卒業して高専に入学することもできますが、このような例外的な場合は考えないことにします。

²⁾ 分母を払うためには分母 x^2-4 と x^2-2x との公倍数を掛ければよいので、必ずしも最小公倍数である必要はありません。例えば、分母を払うために両辺に $(x^2-4)(x^2-2x)$ を掛けてもかまいません；ただ式の計算が面倒になります。

³⁾ 式 A または式 B の値がないとき、等式 $A=B$ には意味がないので、 $A=B$ は成り立ちません。

⁴⁾ 例えば、 $B=0$ のとき、分数 $\frac{A}{B}$ の値がないので、 $A=C$ が成り立っても

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ は成り立ちません。