§3.8　無理方程式

根号 $\sqrt{}$ の中に未知数が現れるような方程式を無理方程式ということがあります．無理方程式を解くために次のことを用います：

(1)　実数を表す式 A と B とについて，$A=B$ ならば $A^2=B^2$ ；

(2)　実数を表す式 A について $\sqrt{A}^{\,2}=A$ （定理 1.8.2）．

例解　実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ を解きます．両辺を2乗すると

$$\sqrt{x+3}^{\,2}=(x+1)^2\ ,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^{\,2}=x+3$ で右辺は $(x+1)^2=x^2+2x+1$ ですから，

$$x+3=x^2+2x+1\ ,$$
$$x^2+x-2=0\ ,$$
$$(x-1)(x+2)=0\ ,$$

従って $x=1$ または $x=-2$ ．故に，

$$\sqrt{x+3}=x+1\ \text{ならば}\quad x=1\ \text{または}\ x=-2\ .$$

ところが，$x=-2$ のとき，

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{1}=1\ ,\qquad x+1=-1\ ,$$

与えられた方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ は成り立たないので，-2 は与えられた方程式の解ではありません．$x=1$ のとき，

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{4}=2\ ,\qquad x+1=2\ ,$$

与えられた方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ は成り立つので，1 は与えられた方程式の解です．

実数を表す式 A と B とについて，等式 $A=B$ から等式 $A^2=B^2$ が導けますが，逆に $A^2=B^2$ から $A=B$ を導けません[5]．先程の例では，等式 $\sqrt{x+3}=x+1$ から等式 $\sqrt{x+3}^{\,2}=(x+1)^2$ が導けますが，逆に $\sqrt{x+3}^{\,2}=(x+1)^2$ から $\sqrt{x+3}=x+1$ を導けません．従って，x に関する方程式 $\sqrt{x+3}^{\,2}=(x+1)^2$ の解の範囲は，元の方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ の解の範囲を含みますが，それ以外のものも含むかもしれません．ですから，方程式 $\sqrt{x+3}^{\,2}=(x+1)^2$ の解の各々が与えられた方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ の解であるかどうか調べる必要があります．　終

例題　実数を表す変数 x に関する方程式 $x-\sqrt{19-2x}=2$ を解く．

〔方針〕 $\sqrt{\bigcirc}=\square$ の形の等式に変形して両辺を2乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる．

〔解答〕 方程式 $x-\sqrt{19-2x}=2$ より，

$$\sqrt{19-2x}=x-2\ ,$$
$$\sqrt{19-2x}^{\,2}=(x-2)^2\ ,$$
$$19-2x=x^2-4x+4\ ,$$
$$x^2-2x-15=0\ ,$$
$$(x+3)(x-5)=0\ ,$$

従って $x=5$ または $x=-3$ ．$x=5$ のとき，$x-\sqrt{19-2x}=5-\sqrt{9}=2$ ，つまり与えられた方程式は成り立つ．$x=-3$ のとき，$x-\sqrt{19-2x}=-3-\sqrt{25}=-8$ なので $x-\sqrt{19-2x}\neq 2$ ，つまり与えられた方程式は成り立たない．故に与えられた方程式の解は 5 だけである．　終

問題 3.8.1　実数を表す変数 x に関する方程式 $\sqrt{25-x^2}+x=1$ を解きなさい．

例題　実数を表す変数 a に関する方程式 $6-\sqrt{20-a^2}=a$ を解く．

〔方針〕 $\sqrt{\bigcirc}=\square$ の形の等式に変形して両辺を2乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる．

〔解答〕 方程式 $6-\sqrt{20-a^2}=a$ より，

$$\sqrt{20-a^2}=6-a\ ,$$
$$\sqrt{20-a^2}^{\,2}=(6-a)^2\ ,$$
$$20-a^2=a^2-12a+36\ ,$$
$$a^2-6a+8=0\ ,$$
$$(a-2)(a-4)=0\ ,$$

よって $a=2$ または $a=4$ ．$a=2$ のとき，$6-\sqrt{20-a^2}=6-\sqrt{16}=2$ なので $6-\sqrt{20-a^2}=a$ ，つまり与えられた方程式は成り立つ．$a=4$ のとき，$6-\sqrt{20-4^2}=6-\sqrt{4}=4$ なので $6-\sqrt{20-a^2}=a$ ，つまり与えられた方程式は成り立つ．故に与えられた方程式の解は 2 と 4 とである．　終

問題 3.8.2　実数を表す変数 k に関する方程式 $2-\sqrt{7-6k}=k$ を解きなさい．

例題　実数を表す変数 k に関する方程式 $1-\sqrt{5k-11}=k$ を解く．

〔方針〕 $\sqrt{\bigcirc}=\square$ の形の等式に変形して両辺を2乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる．

〔解答〕 方程式 $1-\sqrt{5k-11}=k$ より，

$$\sqrt{5k-11}=1-k\ ,$$
$$\sqrt{5k-11}^{\,2}=(1-k)^2\ ,$$
$$5k-11=1-2k+k^2\ ,$$
$$k^2-7k+12=0\ ,$$
$$(k-3)(k-4)=0\ ,$$

よって $k=3$ または $x=4$ ．$k=3$ のとき，$1-\sqrt{5k-11}=1-\sqrt{4}=-1$ なので $1-\sqrt{5k-11}\neq k$ ，つまり与えられた方程式は成り立たない．$k=4$ のとき，$1-\sqrt{5k-11}=1-\sqrt{9}=-2$ なので $1-\sqrt{5k-11}\neq k$ ，つまり与えられた方程式は成り立たない．故に与えられた方程式の解は無い．　終

問題 3.8.3　実数を表す変数 a に関する方程式 $a-\sqrt{21-4a}=6$ を解きなさい．

---

[5] $A^2=B^2$ から $A=\pm B$ を導くことはできます（定理 1.3.2）．