

§3.8 無理方程式

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数が現れるような方程式を無理方程式ということがあります。根号 $\sqrt{\quad}$ の中の式の値は実数に限ります。例えば変数 x の無理式 $\sqrt{3x+5}$ を考えるとき、 $2x+5$ の値は実数でなければならないので、 x の値は実数でなければなりません。このような理由で、根号 $\sqrt{\quad}$ の中に変数 x が現れる無理方程式では通常は x は実数を表すものとします。

無理方程式を解くために次のことを用います：

- (1) 実数を表す式 A と B について、 $A=B$ ならば $A^2=B^2$ ；
- (2) 実数を表す式 A について $\sqrt{A^2}=A$ (定理 1.8.2)。

例解 実数を表す変数 x に関する無理方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ を解きます。両辺を 2 乗すると

$$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2,$$

この等式の左辺は $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ で右辺は $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ ですから、

$$\begin{aligned}x+3 &= x^2+2x+1, \\x^2+x-2 &= 0, \\(x-1)(x+2) &= 0,\end{aligned}$$

従って $x=1$ または $x=-2$ 。故に、

$$\sqrt{x+3} = x+1 \text{ ならば } x=1 \text{ または } x=-2.$$

ところが、 $x=-2$ のとき、

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{1} = 1, \quad x+1 = -1,$$

与えられた方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ は成り立たないで、 -2 は与えられた方程式の解ではありません。 $x=1$ のとき、

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{4} = 2, \quad x+1 = 2,$$

与えられた方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ は成り立つので、 1 は与えられた方程式の解です。

実数を表す式 A と B について、等式 $A=B$ から等式 $A^2=B^2$ が導けますが、逆に $A^2=B^2$ から $A=B$ を導けません⁷⁾。先程の例では、等式 $\sqrt{x+3}=x+1$ から等式 $\sqrt{x+3}^2=(x+1)^2$ が導けますが、逆に $\sqrt{x+3}^2=(x+1)^2$ から $\sqrt{x+3}=x+1$ を導けません。従って、 x に関する方程式 $\sqrt{x+3}^2=(x+1)^2$ の解の範囲は、元の方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ の解の範囲を含みますが、それ以外のも含むかもしれません。ですから、方程式 $\sqrt{x+3}^2=(x+1)^2$ の解の各々が与えられた方程式 $\sqrt{x+3}=x+1$ の解であるかどうか調べる必要があります。 **終**

例題 実数を表す変数 x に関する方程式 $x-\sqrt{19-2x}=2$ を解く。

【方針】 $\sqrt{\square}=\square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる。

【解答】 方程式 $x-\sqrt{19-2x}=2$ より、

$$\begin{aligned}\sqrt{19-2x} &= x-2, \\\sqrt{19-2x}^2 &= (x-2)^2, \\19-2x &= x^2-4x+4, \\x^2-2x-15 &= 0, \\(x+3)(x-5) &= 0,\end{aligned}$$

従って $x=5$ または $x=-3$ 。 $x=5$ のとき、 $x-\sqrt{19-2x}=5-\sqrt{9}=2$ 、つまり与えられた方程式は成り立つ。 $x=-3$ のとき、 $x-\sqrt{19-2x}=-3-\sqrt{25}=-8$ なので $x-\sqrt{19-2x} \neq 2$ 、つまり与えられた方程式は成り立たない。故に与えられた方程式の解は 5 だけである。 **終**

問題 3.8.1 実数を表す変数 x に関する方程式 $\sqrt{25-x^2}+x=1$ を解きなさい。

例題 実数を表す変数 a に関する方程式 $6-\sqrt{20-a^2}=a$ を解く。

【方針】 $\sqrt{\square}=\square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる。

【解答】 方程式 $6-\sqrt{20-a^2}=a$ より、

$$\begin{aligned}\sqrt{20-a^2} &= 6-a, \\\sqrt{20-a^2}^2 &= (6-a)^2, \\20-a^2 &= a^2-12a+36, \\a^2-6a+8 &= 0, \\(a-2)(a-4) &= 0,\end{aligned}$$

よって $a=2$ または $a=4$ 。 $a=2$ のとき、 $6-\sqrt{20-a^2}=6-\sqrt{16}=2$ なので $6-\sqrt{20-a^2}=a$ 、つまり与えられた方程式は成り立つ。 $a=4$ のとき、 $6-\sqrt{20-4^2}=6-\sqrt{4}=4$ なので $6-\sqrt{20-a^2}=a$ 、つまり与えられた方程式は成り立つ。故に与えられた方程式の解は 2 と 4 とである。 **終**

問題 3.8.2 実数を表す変数 k に関する方程式 $2-\sqrt{7-6k}=k$ を解きなさい。

例題 実数を表す変数 k に関する方程式 $1-\sqrt{5k-11}=k$ を解く。

【方針】 $\sqrt{\square}=\square$ の形の等式に変形して両辺を 2 乗して求めた解が元の方程式の解であるかどうか調べる。

【解答】 方程式 $1-\sqrt{5k-11}=k$ より、

$$\begin{aligned}\sqrt{5k-11} &= 1-k, \\\sqrt{5k-11}^2 &= (1-k)^2, \\5k-11 &= 1-2k+k^2, \\k^2-7k+12 &= 0, \\(k-3)(k-4) &= 0,\end{aligned}$$

よって $k=3$ または $x=4$ 。 $k=3$ のとき、 $1-\sqrt{5k-11}=1-\sqrt{4}=-1$ なので $1-\sqrt{5k-11} \neq k$ 、つまり与えられた方程式は成り立たない。 $k=4$ のとき、 $1-\sqrt{5k-11}=1-\sqrt{9}=-2$ なので $1-\sqrt{5k-11} \neq k$ 、つまり与えられた方程式は成り立たない。故に与えられた方程式の解は無い。 **終**

問題 3.8.3 実数を表す変数 a に関する方程式 $a-\sqrt{21-4a}=6$ を解きなさい。

⁷⁾ $A^2=B^2$ から $A=\pm B$ を導くことはできます (定理 1.3.2)。