

### § 3.9 連立方程式

変数  $x$  と  $y$  とが現れる等式に対して、その等式が  $x, y$  に関する条件を表すと考えるときに、その等式を  $x, y$  に関する ( $x, y$  についての) 方程式といいます。複数の方程式に対して、各々が表す条件を“かつ”で結んだ条件を考えると、それらの方程式を連立するといいます。

**例解** 変数  $x$  と  $y$  とに関する2個の方程式  $2x+y=7$  と  $3x-2y=0$  とを連立するとは、それら(が表す条件)を“かつ”で結んだ条件

$$2x+y=7 \text{ かつ } 3x-2y=0$$

を考えることです。この連立方程式を

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

と書き表すことがあります。この連立方程式を解きます。 $2x+y=7$  より  $y=7-2x$ 、この等式と方程式  $3x-2y=0$  より

$$3x-2(7-2x)=0,$$

この方程式を解くと  $x=2$ 。  $y=7-2x$  より  $y=3$ 。故に、連立方程式

$$2x+y=7 \text{ かつ } 3x-2y=0$$

を解くと、 $x=2$  かつ  $y=3$ 。このように、連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

を解くとは、同値で最も簡単な連立方程式

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

を導くことです。 終

**例題** 複素数を表す変数  $x, y, z$  に関する次の3元連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2x+y-z=-8 & \cdots (1) \\ -x+2y+3z=9 & \cdots (2) \\ 3x-4y-z=1 & \cdots (3) \end{cases}.$$

【解説】 (1) - (3) として  $z$  を消去する：

$$-x+5y=-9. \tag{4}$$

また、(2) + (3) × 3 として  $z$  を消去する：

$$8x-10y=12. \tag{5}$$

(4) × 2 + (5) として  $y$  を消去すると  $6x=-6$ 、従って  $x=-1$ 。等式 (4) より

$$5y=-9+x=-9-1=-10,$$

従って  $y=-2$ 。等式 (1) より

$$z=2x+y+8=-2-10+8=-4.$$

与えられた連立方程式を解くと、 $x=-1$  かつ  $y=-2$  かつ  $z=4$ 。 終

**問題 3.9.1** 複素数を表す変数  $x, y, z$  に関する次の3元連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} 3x-6y+5z=5 \\ 4x+2y-z=1 \\ 7x-4y+8z=2 \end{cases}.$$

連立方程式を構成する方程式のうちの片方が1次方程式で他方が2次方程式であるときを扱います。

**例題** 複素数を表す変数  $x, y$  に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ 2y^2-3x^2=3y-4x+5 \end{cases}.$$

【解答】  $3x-2y-1=0$  より  $y=\frac{3x-1}{2}$ 。この等式と  $2y^2-3x^2=3y-4x+5$  とより、

$$2\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2-3x^2=3\frac{3x-1}{2}-4x+5,$$

$$\frac{9x^2-6x+1}{2}-3x^2=\frac{9x-3}{2}-4x+5,$$

$$9x^2-6x+1-6x^2=9x-3-8x+10,$$

$$3x^2-7x-6=0,$$

$$(x-3)(3x+2)=0,$$

$$x=3 \text{ または } x=-\frac{2}{3}.$$

$y=\frac{3x-1}{2}$  なので、 $x=3$  のとき  $y=4$ 、 $x=-\frac{2}{3}$  のとき  $y=-\frac{3}{2}$ 。故に、与えられた連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}.$$
 終

**問題 3.9.2** 複素数を表す変数  $x, y$  に関する次の連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x^2-3y^2=3x+10y+13 \end{cases}.$$

**例題** 複素数を表す変数  $x, y$  に関する次の連立方程式<sup>8)</sup>を解く：

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2xy+3x=2y+4 \end{cases}.$$

【解説】  $x+2y=8$  より  $x=8-2y$ 。この等式と等式  $2xy+3x=2y+4$  とより、

$$2(8-2y)y+3(8-2y)=2y+4,$$

$$16y-4y^2+24-6y=2y+4,$$

$$-4y^2+8y+16=0,$$

$$\frac{1}{2}y^2-y-2=0,$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-(-4)}}{1}=1\pm\sqrt{5}.$$

$x=8-2y$  なので、

$$y=1\pm\sqrt{5} \text{ のとき } x=8-2y=8-2(1\pm\sqrt{5})=6\mp 2\sqrt{5} \text{ (複号同順)}. \tag{終}$$

与えられた連立方程式を解くと、 $x=6\pm 2\sqrt{5}$  かつ  $y=1\mp\sqrt{5}$  (複号同順)。

**問題 3.9.3** 複素数を表す変数  $x, y$  に関する次の連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ x^2+2xy=3x+7y+4 \end{cases}.$$

**例題** 複素数を表す変数  $a, b$  に関する次の連立方程式を解く：

$$\begin{cases} 2a-3b=1 \\ ab+b^2-3a-b=-14 \end{cases}$$

$2a-3b=1$  より  $a=\frac{3b+1}{2}$ 。この等式と等式  $ab+b^2-3a-b=-14$  とより、

$$\frac{3b+1}{2}\cdot b+b^2-3\cdot\frac{3b+1}{2}-b=-14,$$

$$3b^2+b+2b^2-9b-3-2b=-28,$$

$$5b^2-10b+25=0,$$

$$\frac{1}{2}b^2-b+\frac{5}{2}=0,$$

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm\sqrt{4}i=1\pm 2i.$$

$a=\frac{3b+1}{2}$  なので、

$$b=1\pm 2i \text{ のとき } a=\frac{3b+1}{2}=\frac{3(1\pm 2i)+1}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i \text{ (複号同順)}. \tag{終}$$

与えられた連立方程式を解くと、 $a=2\pm 3i$  かつ  $b=1\pm 2i$  (複号同順)。

**問題 3.9.4** 複素数を表す変数  $a, b$  に関する次の連立方程式を解きなさい：

$$\begin{cases} 3a-2b=4 \\ a^2+2ab-2b^2-4b=4 \end{cases}.$$

<sup>8)</sup>  $x$  と  $y$  との両方が未知数なので下段の方程式  $2xy+3x=2y+4$  の項  $2xy$  は  $x$  について1次と  $y$  について1次との併せて2次です。よって下段の方程式  $2xy+3x=2y+4$  は2次方程式です。