

第3章の補遺1 複素数の平方根

1.6節で述べたように、数 a に対して、 $x^2 = a$ となる数 x を a の平方根といいます。1.8節で述べたように、実数の範囲では -1 の平方根はありません。このように、実数の範囲で考えると、任意の実数に対してその平方根があるとはいえません。しかし、複素数の範囲で考えると、任意の複素数に対してその平方根があります。

例解 複素数 $5 - 12i$ の平方根を求めます。 $5 - 12i$ の平方根を $x + iy$ (x, y は実数) とおきます：

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i .$$

$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ですから

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i .$$

x と y とは実数ですから、 $x^2 - y^2$ 及び $2xy$ も実数です。従って定理 1.9.1 より、

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 .$$

この連立方程式を解きます。 $x^2 - y^2 = 5$ の両辺に x^2 を掛けて

$$x^4 - x^2y^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - (xy)^2 = 5x^2 ,$$

$xy = -6$ なので

$$x^4 - (-6)^2 = 5x^2 ,$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 ,$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 ,$$

$X = x^2$ ですから、 $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$. x は実数ですから $x^2 \geq 0$, 従って $x^2 = 9$. よって

$$x = \pm 3 .$$

$xy = -6$ ですから、 $x = 3$ のとき $y = -2$, $x = -3$ のとき $y = 2$. 従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) .$$

故に、複素数 $5 - 12i$ の平方根は $\pm(3 - 2i)$ です。

実際に $\pm(3 - 2i)$ を 2 乗すると

$$\{\pm(3 - 2i)\}^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i .$$

終

問題 3.補遺1 複素数 $24 + 10i$ の平方根を求めなさい。