

## § 4.1 関数の意味

変数  $y$  が変数  $x$  の**関数** (function) であるとは、 $x$  の値を定めるとそれに応じて  $y$  の値が唯一つに定まることです。

**例** 変数  $x$  の値と変数  $y$  の値とについて  $y = 2x + 3$  となるとき、

$$x = 0 \text{ のとき } y = 3, \quad x = 1 \text{ のとき } y = 5, \quad x = 3 \text{ のとき } y = 9,$$

というように、 $x$  の値を定めるとそれに応じて  $y$  の値が唯一つに定まります。よって  $y$  は  $x$  の関数です。 終

**例** 変数  $u$  の値と変数  $v$  の値とについて  $v = \frac{1}{2}u^2$  となるとき、

$$u = 1 \text{ のとき } v = \frac{1}{2}, \quad u = 2 \text{ のとき } v = 1, \quad u = 4 \text{ のとき } v = 8,$$

というように、 $u$  の値を定めるとそれに応じて  $v$  の値が唯一つに定まります。よって  $v$  は  $u$  の関数です。 終

変数  $x$  の値と変数  $y$  の値とについて、例えば、

$$y = 3x^2 - 5x + 4 \text{ とか, } y = 2x^3 \text{ とか, } y = \frac{6}{x} \text{ とか}$$

になるとき、 $y$  は  $x$  の関数です。このように、変数  $y$  が変数  $x$  の関数であるとき、 $x$  の値と  $y$  の値との関係はしばしば次の形の方程式で表されます：

$$y = (\textit{x を含む式}).$$

この形の方程式で表される関数を一般的に  $y = f(x)$  と書き表します；ここで  $f(x)$  は変数  $x$  を含む式を一般的に表します。そして、 $f(x)$  に含まれる変数  $x$  に例えば 3 を代入したときの値を  $f(3)$  と書き表します。

**例** 変数  $x$  が現れる式  $f(x)$  を  $f(x) = x^2 - 3x$  とおくと次のようになります：

$$f(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 = 10,$$

$$f(-4) = (-4)^2 - 3(-4) = 28,$$

$$f(a-2) = (a-2)^2 - 3(a-2) = a^2 - 7a + 10. \quad \text{終}$$

変数  $y$  が変数  $x$  の関数であるとき、 $x$  を**独立変数** (independent variable) といい、 $y$  を**従属変数** (dependent variable) といいます。独立変数の値を定めると従属変数の値は一つに定まります。変数  $x$  の関数  $y = f(x)$  を考えるとき、変数  $x$  が独立変数で変数  $y$  が従属変数です。

**例** 変数  $u$  の関数  $v = u^2 - 3u + 2$  を考えるとき、変数  $u$  が独立変数で変数  $v$  が従属変数です。この関数について、

$$u = 4 \text{ のとき } v = 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 6,$$

$$u = \sqrt{5} \text{ のとき } v = \sqrt{5}^2 - 3\sqrt{5} + 2 = 7 - 3\sqrt{5},$$

$$u = 2a + 3 \text{ (} a \text{ は定数) のとき } v = (2a + 3)^2 - 3(2a + 3) + 2 = 4a^2 + 6a + 2. \quad \text{終}$$

**問題 4.1.1** 変数  $t$  の関数  $u = t^2 - 3t + 4$  について、 $t = -2$  のときの値と、 $t = \sqrt{6}$  のときの値と、 $t = 2a - 3$  ( $a$  は定数) のときの値とを求めなさい。

本書では、独立変数の値も従属変数の値も実数であるような関数を扱います。そこで、特に断りが無い限り、関数を表す式に表れる変数は実数を表します。