

§4.10 関数のグラフの共有点

座標平面において、2つの関数のグラフの両方に属す点を、それらのグラフの**共有点**といいます。

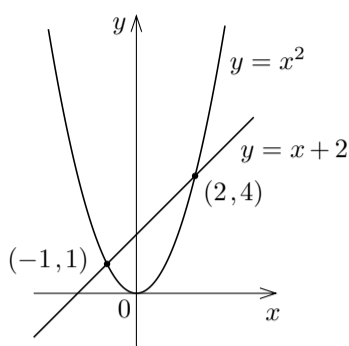
例解 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求めます。実数 u, v について、4.3節で述べたように、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} &\iff v = u^2, \\ \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} &\iff v = u + 2; \end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフと } y = x + 2 \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff \text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属しかつ } y = x + 2 \text{ のグラフにも属す} \\ \iff v = u^2 \text{ かつ } v = u + 2. \end{aligned}$$

従って、 $y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解きます。この連立方程式より $u^2 = u + 2$ なので、 $u^2 - u - 2 = 0$ 、 $u = 2$ または $u = -1$ 。 $v = u + 2$ なので、 $u = 2$ のとき $v = 4$ 、 $u = -1$ のとき $v = 1$ 。よって、 $(u, v) = (2, 4)$ または $(u, v) = (-1, 1)$ 。故に、関数 $y = x^2$ のグラフと関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点は $(2, 4)$ と $(-1, 1)$ とです。



終

一般的に述べます。変数 x の関数 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 及び実数 u, v について、4.3節で述べたように、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} &\iff f(u) = v, \\ \text{点 } (u, v) \text{ が } y = g(x) \text{ のグラフに属す} &\iff g(u) = v; \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフと } y = g(x) \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff \text{点 } (u, v) \text{ は } y = f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y = g(x) \text{ のグラフにも属す} \\ \iff v = f(u) \text{ かつ } v = g(u). \end{aligned}$$

このように、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフとの共有点 (x, y) は、連立方程式 $y = f(x)$ かつ $y = g(x)$ の実数解の順序対です。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める。

【解説】 共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので、

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3 &= 2x^2 - 5x, \\ x^2 - 4x + 3 &= 0, \\ (x - 1)(x - 3) &= 0, \end{aligned}$$

よって $x = 1$ または $x = 3$ 。更に、 $y = x^2 - x - 3$ より、 $x = 1$ のとき $y = -3$ 、 $x = 3$ のとき $y = 3$ 。故に、関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点は $(1, -3)$ と $(3, 3)$ とである。

終

問題 4.10.1 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 + x - 7$ のグラフとの共有点を求めなさい。

関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフとの共有点 (x, y) は、連立方程式 $y = f(x)$ かつ $y = g(x)$ の実数解の順序対です。ですから、この連立方程式の実数解が無いときは、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフとの共有点もありません。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める。

【解説】 共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5x - 1$ なので、

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 5 &= 2x^2 - 5x - 1, \\ x^2 - 3x + 4 &= 0. \end{aligned}$$

この x に関する2次方程式は、判別式が $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ なので、実数解が無い。従って、関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点はない。

終

問題 4.10.2 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点を求めなさい。

例題 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x - 6}{3x - 1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと x の関数 $y = \frac{x + 9}{4}$ のグラフとの共有点を求める。

共有点 (x, y) について、 $y = \frac{2x - 6}{3x - 1}$ かつ $y = \frac{x + 9}{4}$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{2x - 6}{3x - 1} &= \frac{x + 9}{4}, \\ (3x - 1)(x + 9) &= 4(2x - 6), \\ 3x^2 + 18x + 15 &= 0, \\ x^2 + 6x + 5 &= 0, \\ (x + 1)(x + 5) &= 0, \end{aligned}$$

よって $x = -1$ または $x = -5$ 。どちらのときも $x \neq \frac{1}{3}$ 。 $y = \frac{x + 9}{4}$ より、 $x = -1$ のとき $y = 2$ 。 $x = -5$ のとき $y = 1$ 。共有点は $(-1, 2)$ と $(-5, 1)$ とである。

終

問題 4.10.3 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{7x + 3}{2x - 3}$ ($x \neq \frac{3}{2}$) のグラフと x の関数 $y = \frac{x + 9}{3}$ のグラフとの共有点を求めなさい。