§4.10　関数のグラフの共有点

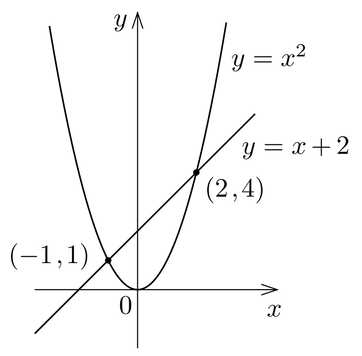
　座標平面において，2つの関数のグラフの両方に属す点を，それらのグラフの**共有点**といいます．

$\boxed{\text{例解}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2$ のグラフと x の関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点を求めます．実数 u,v について，4.3節で述べたように，

$$\text{点 }(u,v)\text{ が }y=x^2\text{ のグラフに属す} \iff v=u^2\ ,$$
$$\text{点 }(u,v)\text{ が }y=x+2\text{ のグラフに属す} \iff v=u+2\ ;$$

ですから，

$$\begin{aligned} &\text{点 }(u,v)\text{ が }y=x^2\text{ のグラフと }y=x+2\text{ のグラフとの共有点である}\\ \iff &\text{点 }(u,v)\text{ が }y=x^2\text{ のグラフに属しかつ }y=x+2\text{ のグラフにも属す}\\ \iff &v=u^2\text{ かつ }v=u+2\ . \end{aligned}$$



従って，$y=x^2$ のグラフと $y=x+2$ のグラフとの共有点 (u,v) を求めるには連立方程式 $v=u^2$ かつ $v=u+2$ を解きます．この連立方程式より $u^2=u+2$ なので，$u^2-u-2=0$，$u=2$ または $u=-1$．$v=u+2$ なので，$u=2$ のとき $v=4$，$u=-1$ のとき $v=1$．よって，$(u,v)=(2,4)$ または $(u,v)=(-1,1)$．故に，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=x+2$ のグラフとの共有点は $(2,4)$ と $(-1,1)$ とです．　$\boxed{\text{終}}$

　一般的に述べます．変数 x の関数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 及び実数 u,v について，4.3節で述べたように，

$$\text{点 }(u,v)\text{ が }y=f(x)\text{ のグラフに属す} \iff f(u)=v\ ,$$
$$\text{点 }(u,v)\text{ が }y=g(x)\text{ のグラフに属す} \iff g(u)=v\ ;$$

よって，

$$\begin{aligned} &\text{点 }(u,v)\text{ が }y=f(x)\text{ のグラフと }y=g(x)\text{ のグラフとの共有点である}\\ \iff &\text{点 }(u,v)\text{ は }y=f(x)\text{ のグラフに属しかつ }y=g(x)\text{ のグラフにも属す}\\ \iff &v=f(u)\text{ かつ }v=g(u)\ . \end{aligned}$$

このように，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=g(x)$ のグラフとの共有点 (x,y) は，連立方程式 $y=f(x)$ かつ $y=g(x)$ の実数解の順序対です．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点を求める．

〔解説〕 共有点 (x,y) について，$y=x^2-x-3$ かつ $y=2x^2-5x$ なので，

$$x^2-x-3=2x^2-5x\ ,$$
$$x^2-4x+3=0\ ,$$
$$(x-1)(x-3)=0\ ,$$

よって $x=1$ または $x=3$．更に，$y=x^2-x-3$ より，$x=1$ のとき $y=-3$，$x=3$ のとき $y=3$．故に，関数 $y=x^2-x-3$ のグラフと関数 $y=2x^2-5x$ のグラフとの共有点は $(1,-3)$ と $(3,3)$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.10.1}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフと x の関数 $y=3x^2+x-7$ のグラフとの共有点を求めなさい．

　関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=g(x)$ のグラフとの共有点 (x,y) は，連立方程式 $y=f(x)$ かつ $y=g(x)$ の実数解の順序対です．ですから，この連立方程式の実数解が無いときは，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフとの共有点もありません．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと x の関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点を求める．

〔解説〕 共有点 (x,y) について，$y=x^2-2x-5$ かつ $y=2x^2-5y-1$ なので，

$$x^2-2x-5=2x^2-5x-1\ ,$$
$$x^2-3x+4=0\ .$$

この x に関する2次方程式は，判別式が $(-3)^2-4\cdot1\cdot4<0$ なので，実数解が無い．従って，関数 $y=x^2-2x-5$ のグラフと関数 $y=2x^2-5x-1$ のグラフとの共有点は無い．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.10.2}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-2x+1$ のグラフと x の関数 $y=3x^2-7x+5$ のグラフとの共有点を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ $\left(x\neq\dfrac{1}{3}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める．

　共有点　(x,y) について，$y=\dfrac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y=\dfrac{x+9}{4}$ なので，

$$\frac{2x-6}{3x-1}=\frac{x+9}{4}\ ,$$
$$(3x-1)(x+9)=4(2x-6)\ ,$$
$$3x^2+18x+15=0\ ,$$
$$x^2+6x+5=0\ ,$$
$$(x+1)(x+5)=0\ ,$$

よって $x=-1$ または $x=-5$．どちらのときも $x\neq\dfrac{1}{3}$．$y=\dfrac{x+9}{4}$ より，$x=-1$ のとき $y=2$．$x=-5$ のとき $y=1$．共有点は $(-1,2)$ と $(-5,1)$．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.10.3}}$　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=\dfrac{7x+3}{2x-3}$ $\left(x\neq\dfrac{3}{2}\right)$ のグラフと x の関数 $y=\dfrac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めなさい．