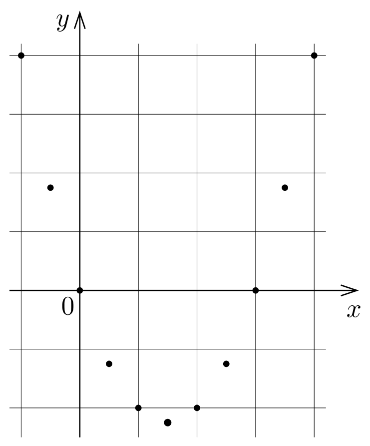
§4.3　関数のグラフ

例解　変数 x の関数 $y=x^2-3x$ のグラフを考えます．座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-3x$ のグラフとは，$y=x^2-3x$ となる点 (x,y) の全体のことです．つまり，関数 $y=x^2-3x$ のグラフとは座標平面の点の集合

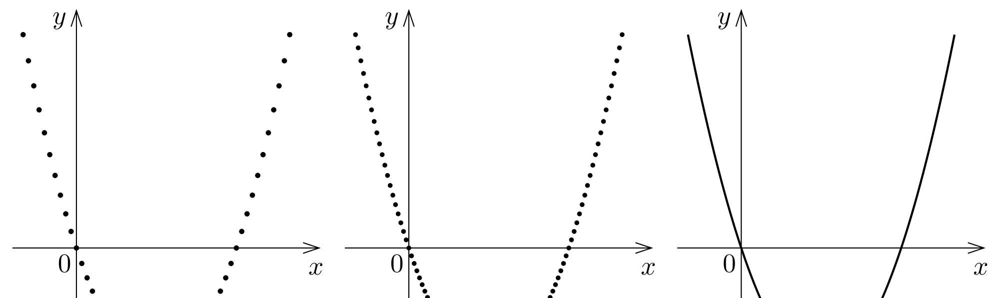
$$\{\,(x,y)\mid y=x^2-3x\,\}$$

のことです．x 座標が $-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4$ のときの y 座標を計算して，グラフの点をとります．

x の値	$y=x^2-3x$ の値	対応するグラフの点
-1	4	$(-1,4)$
-0.5	1.75	$(-0.5,1.75)$
0	0	$(0,0)$
0.5	-1.25	$(0.5,-1.25)$
1	-2	$(1,-2)$
1.5	-2.25	$(1.5,-2.25)$
2	-2	$(2,-2)$
2.5	-1.25	$(2.5,-1.25)$
3	0	$(3,0)$
3.5	1.75	$(3.5,1.75)$
4	4	$(4,4)$



プロットする点を増やしていくと，点と点とがつながって曲線になっていきます．



このようにしてできる曲線が関数 $y=x^2-3x$ のグラフです．実数 a,b とについて次のようになります：

$$\begin{aligned}\text{点 }(a,b)\text{ が } y=x^2-3x \text{ のグラフに属す} &\iff (a,b)\in\{\,(x,y)\mid y=x^2-3x\,\}\\ &\iff b=a^2-3a\ .\end{aligned}$$

終

一般的に，xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=f(x)$ の**グラフ** (graph) とは，$y=f(x)$ となる点 (x,y) の全体 $\{\,(x,y)\mid y=f(x)\,\}$ のことです．ですから次のようになります．

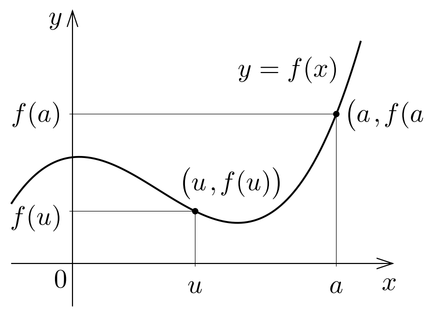
> 変数 x の関数 $y=f(x)$ 及び実数 a,b について，
> $$\begin{aligned}\text{点 }(a,b)\text{ が } y=f(x) \text{ のグラフに属す} &\iff (a,b)\in\{\,(x,y)\mid y=f(x)\,\}\\ &\iff b=f(a)\ .\end{aligned}$$

例　xy 座標平面の 3 点 $(-1,2)$ と $(1,-2)$ と $(2,1)$ とについて，変数 x の関数 $y=x^2-3x$ のグラフに属すかどうか調べます．xy 座標平面の点を (x,y) とおきます．$(x,y)=(-1,2)$ のとき，$x^2-3x=4$，$y=2$ なので $x^2-3x\neq y$，よって点 $(-1,2)$ は $y=x^2-3x$ のグラフに属しません．$(x,y)=(1,-2)$ のとき，$x^2-3x=-2$，$y=-2$ なので $x^2-3x=y$，よって点 $(1,-2)$ は $y=x^2-3x$ のグラフに属します．$(x,y)=(2,1)$ のとき，$x^2-3x=-2$，$y=1$ なので $x^2-3x\neq y$，よって点 $(2,1)$ は $y=x^2-3x$ のグラフに属しません．終

問題 4.3.1　xy 座標平面の以下の 4 点について，変数 x の関数 $y=x^3-5x$ のグラフに属すかどうか調べなさい．

(1) $(-1,6)$．　(2) $(0,3)$．　(3) $(1,4)$．　(4) $(2,-2)$．

xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=f(x)$ のグラフに属す点で x 座標が a である点を求めます．グラフに属す点 (x,y) について，$y=f(x)$ なので，x 座標を a とすると，$x=a$ より $y=f(a)$．つまり，関数 $y=f(x)$ のグラフの点で x 座標が a である点の y 座標は $f(a)$ です．



例題　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=2x^2-4x$ のグラフに属す点で x 座標が 3 である点 P を求める．

点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について $y=2x^2-4x$．$x=3$ なので $y=2\cdot 3^2-4\cdot 3=6$．よって $\mathrm{P}=(3,6)$．終

問題 4.3.2　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=2x^3-x^2+7x$ のグラフに属す点で x 座標が -2 である点 A を求めなさい．

xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=f(x)$ のグラフの点で y 座標が a である点を求めたいとします．グラフに属す点 (x,y) について，$y=f(x)$ なので，y 座標を a とすると，$y=a$ より $a=f(x)$．この x に関する方程式の実数解が，関数 $y=f(x)$ のグラフの点で y 座標が a である点の x 座標です．

例題　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-7x+6$ のグラフに属す点で y 座標が -4 である点 Q を求める．

点 $\mathrm{Q}=(x,y)$ について $y=x^2-7x+6$．$y=-4$ なので，$-4=x^2-7x+6$，$x^2-7x+10=0$，$(x-2)(x-5)=0$，$x=2$ または $x=5$．よって，$\mathrm{Q}=(2,-4)$ または $\mathrm{Q}=(5,-4)$．終

問題 4.3.3　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=x^2-8x+9$ のグラフに属す点で y 座標が -6 である点 P を求めなさい．

xy 座標平面において，x 座標及び y 座標は実数です．虚数は xy 座標平面の点の x 座標や y 座標になりません．

例題　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=2x^2-5x+7$ のグラフに属す点で y 座標が 3 である点 P を求める．

点 $\mathrm{P}=(x,y)$ について $y=2x^2-5x+7$．$y=3$ なので，$3=2x^2-5x+7$，$2x^2-5x+4=0$；この x に関する 2 次方程式は，判別式の値が $(-5)^2-4\cdot2\cdot4<0$ なので，解が虚数である．虚数は x 座標にならないので，P の x 座標は無い．よって $y=2x^2-5x+7$ のグラフに属す点で y 座標が 3 である点 P は無い．終

問題 4.3.4　xy 座標平面において，変数 x の関数 $y=3x^2-7x+6$ のグラフに属す点で y 座標が 1 である点 Q を求めなさい．