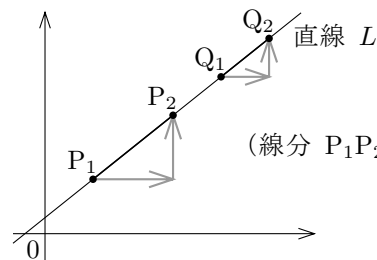
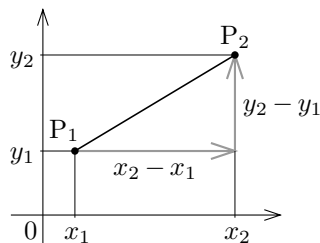


§ 4.5 1次関数のグラフ

実数 x_1, y_1, x_2, y_2 について、 $x_1 \neq x_2$ のとき、座標平面における点 $P_1 = (x_1, y_1)$ と点 $P_2 = (x_2, y_2)$ とを結ぶ線分 P_1P_2 の傾きとは $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ の値つまり

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ の値のことで、座標平面における直線 L に属す2点 P_1 と P_2 (但し $P_1 \neq P_2$) と、 L に属す2点 Q_1 と Q_2 (但し $Q_1 \neq Q_2$) とについて、線分 P_1P_2 の傾きと線分 Q_1Q_2 の傾きとは(あれば)同じです。つまり、直線 L に含まれる線分はどれも傾きが(あれば)同じです：これを直線 L の傾きといいます。



(線分 P_1P_2 の傾き) = (線分 Q_1Q_2 の傾き) = (直線 L の傾き)

例 座標平面において点 $(5, 7)$ と $(2, 3)$ とが直線 L に属するとき、 L の傾きは $\frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$ です。 終

問題 4.5.1 座標平面において点 $(3, 4)$ と $(5, 9)$ とが直線 L に属とします。 L の傾きを求めなさい。

定数 a, b (但し $a \neq 0$) に対して変数 x の1次関数 $y = ax + b$ を考えます。 xy 座標平面において1次関数 $y = ax + b$ のグラフは直線の部分集合です。実数 x_1, y_1, x_2, y_2 (但し $x_1 \neq x_2$) について、点 $P_1 = (x_1, y_1)$ と $P_2 = (x_2, y_2)$ とが1次関数 $y = ax + b$ のグラフに属するとき、 $y_1 = ax_1 + b$ かつ $y_2 = ax_2 + b$ なので、線分 P_1P_2 の傾きは

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a.$$

このように、1次関数 $y = ax + b$ のグラフに属す相異なる2点 P_1 と P_2 とを結ぶ線分 P_1P_2 の傾きは常に a です。このことから、1次関数 $y = ax + b$ のグラフは傾きが a の直線の部分集合です³⁾。

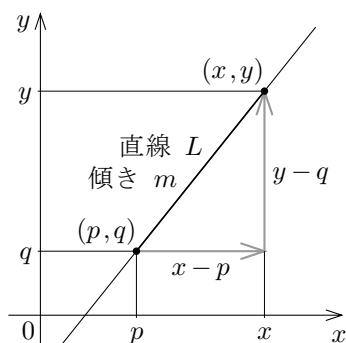
このように1次関数のグラフは直線の部分ですが、逆に傾きが0でない実数である直線は1次関数のグラフです。このことを示します。

定数 m, p, q に対して、 xy 座標平面における直線 L の傾きが m であり点 (p, q) が L に属とします。変数 x, y について、 $x \neq p$ とします。座標平面において点 (x, y) が直線 L に属す条件は、点 (x, y) と点 (p, q) とを結ぶ線分の傾き $\frac{y - q}{x - p}$ が m

になることです： $\frac{y - q}{x - p} = m$ ；この方程式を同値変形すると、 $x - p \neq 0$ なので、

$$\frac{y - q}{x - p} = m \iff y - q = m(x - p) \iff y = m(x - p) + q.$$

このようにして次のことが分かります。



定理 4.5 各定数 m, p, q に対して、 xy 座標平面において傾きが m であり点 (p, q) が属す直線は方程式 $y = m(x - p) + q$ で表される。

例 xy 座標平面において傾きが3であり点 $(2, 7)$ が属す直線は、方程式 $y = 3(x - 2) + 7$ つまり $y = 3x + 1$ で表されます。 終

問題 4.5.2 xy 座標平面において傾きが -2 であり点 $(3, -5)$ が属す直線を表す方程式を求めなさい。

例 xy 座標平面において点 $(2, 4)$ と点 $(5, 13)$ とが属す直線は、傾きが $\frac{13-4}{5-2} = 3$ なので、方程式 $y = 3(x - 2) + 4$ つまり $y = 3x - 2$ で表されます。 終

問題 4.5.3 xy 座標平面において点 $(3, 1)$ と点 $(7, 9)$ とが属す直線を表す方程式を求めなさい。

³⁾ ここで証明は略しますが、関数のグラフに属す相異なる2点 P_1 と P_2 とを結ぶ線分 P_1P_2 の傾きが一定であるとき、そのグラフは直線の部分集合です。