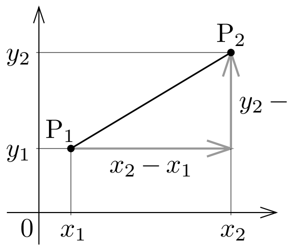
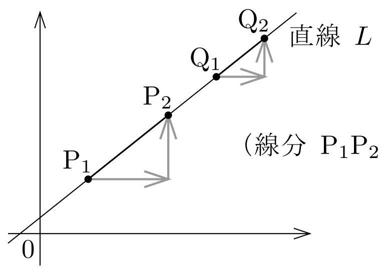
§4.5　1次関数のグラフ



実数 x_1, y_1, x_2, y_2 について，$x_1 \neq x_2$ のとき，座標平面における点 $\mathrm{P}_1 = (x_1, y_1)$ と点 $\mathrm{P}_2 = (x_2, y_2)$ とを結ぶ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の**傾き**とは $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ の値つまり $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ の値のことです．座標平面における直線 L に属す2点 P_1 と P_2（但し $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_2$ ）と，L に属す2点 Q_1 と Q_2（但し $\mathrm{Q}_1 \neq \mathrm{Q}_2$ ）とについて，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きと線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の傾きとは（あれば）同じです．つまり，直線 L に含まれる線分はどれも傾きが（あれば）同じです：これを直線 L の**傾き**といいます．



（線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾き）=（線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の傾き）=（直線 L の傾き）

例　座標平面において点 $(5,7)$ と $(2,3)$ とが直線 L に属すとき，L の傾きは $\dfrac{7-3}{5-2} = \dfrac{4}{3}$ です．　終

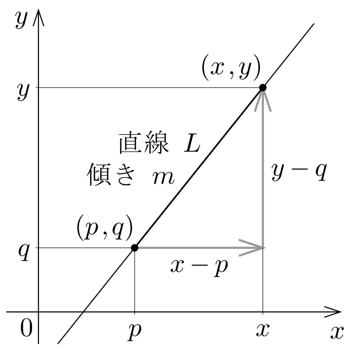
問題 4.5.1　座標平面において点 $(3,4)$ と $(5,9)$ とが直線 L に属すとします．L の傾きを求めなさい．

定数 a, b（但し $a \neq 0$ ）に対して変数 x の1次関数 $y = ax + b$ を考えます．xy 座標平面において1次関数 $y = ax + b$ のグラフは直線の部分集合です．実数 x_1, y_1, x_2, y_2（但し $x_1 \neq x_2$ ）について，点 $\mathrm{P}_1 = (x_1, y_1)$ と $\mathrm{P}_2 = (x_2, y_2)$ とが1次関数 $y = ax + b$ のグラフに属すとき，$y_1 = ax_1 + b$ かつ $y_2 = ax_2 + b$ なので，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きは

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a\ .$$

このように，1次関数 $y = ax + b$ のグラフに属す相異なる2点 P_1 と P_2 とを結ぶ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きは常に a です．このことから，1次関数 $y = ax + b$ のグラフは傾きが a の直線の部分集合です[3]．

このように1次関数のグラフは直線の部分ですが，逆に傾きが 0 でない実数である直線は1次関数のグラフです．このことを示します．



定数 m, p, q に対して，xy 座標平面における直線 L の傾きが m であり点 (p, q) が L に属すとします．変数 x, y について，$x \neq p$ とします．座標平面において点 (x, y) が直線 L に属す条件は，点 (x, y) と点 (p, q) とを結ぶ線分の傾き $\dfrac{y-q}{x-p}$ が m になることです：$\dfrac{y-q}{x-p} = m$ ；この方程式を同値変形すると，$x - p \neq 0$ なので，

$$\frac{y-q}{x-p} = m \iff y - q = m(x-p) \iff y = m(x-p) + q\ .$$

このようにして次のことが分かります：各定数 m, p, q に対して，xy 座標平面において傾きが m であり点 (p, q) が属す直線は方程式 $y = m(x-p) + q$ で表される．

例　xy 座標平面において傾きが 3 であり点 $(2,7)$ が属す直線は，方程式 $y = 3(x-2) + 7$ つまり $y = 3x + 1$ で表されます．　終

問題 4.5.2　xy 座標平面において傾きが -2 であり点 $(3,-5)$ が属す直線を表す方程式を求めなさい．

例　xy 座標平面において点 $(2,4)$ と点 $(5,13)$ とが属す直線は，傾きが $\dfrac{13-4}{5-2} = 3$ なので，方程式 $y = 3(x-2) + 4$ つまり $y = 3x - 2$ で表されます．　終

問題 4.5.3　xy 座標平面において点 $(3,1)$ と点 $(7,9)$ とが属す直線を表す方程式を求めなさい．

---

[3] ここで証明は略しますが，関数のグラフに属す相異なる2点 P_1 と P_2 とを結ぶ線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の傾きが一定であるとき，そのグラフは直線の部分集合です．