

§4.6 2次式の平方完成

変数 x の2次式の平方完成とは、 x の2次式を次の形に変形することです：

$$a(x+p)^2+q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0).$$

平方完成では次のような変形が重要になります： $x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2$ ですから、

$$\begin{aligned} x^2+\square x &= x^2+2\frac{\square}{2}x = x^2+2\frac{\square}{2}x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\frac{\square^2}{4}. \end{aligned}$$

x の係数 \square の $\frac{1}{2}$ の2乗 $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を足して引くことがミソです。

例解 変数 x の2次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成します。まず、 $2x^2+6x$ の部分を x^2 の係数2で括ります：

$$2x^2+6x+5 = 2(x^2+3x)+5.$$

次に、括弧 () の中の2次式 x^2+3x について上述のように変形します。 x の係数3の $\frac{1}{2}$ の2乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引きます。 $x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ ですから、

$$\begin{aligned} x^2+3x &= x^2+2\cdot\frac{3}{2}x = x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2}. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} 2x^2+6x+5 &= 2(x^2+3x)+5 = 2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2}\right\}+5 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3^2}{2^2}+5 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

こうして x の2次式 $2x^2+6x+5$ を平方完成すると $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ となります。

終

例題 変数 x の2次式 $4x^2-5x+1$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} 4x^2-5x+1 &= 4\left(x^2-\frac{5}{4}x\right)+1 = 4\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{8}x+\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right\}+1 \\ &= 4\left\{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{5^2}{8^2}\right\}+1 = 4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-4\cdot\frac{5^2}{8^2}+1 \\ &= 4\left(x-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{9}{16}. \end{aligned}$$

終

問題 4.6.1 変数 x の2次式 $3x^2-5x+1$ を平方完成しなさい。

例題 変数 x の2次式 $-3x^2+8x-4$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} -3x^2+8x-4 &= -3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)-4 = -3\left\{x^2-2\cdot\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-4 \\ &= -3\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4^2}{3^2}\right\}-4 = -3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-(-3)\cdot\frac{4^2}{3^2}-4 \\ &= -3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

終

問題 4.6.2 変数 x の2次式 $-5x^2-6x-3$ を平方完成しなさい。

例題 変数 x の2次式 $\frac{9}{5}x^2-3x+2$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} \frac{9}{5}x^2-3x+2 &= \frac{9}{5}\left(x^2-\frac{5}{9}\cdot 3x\right)+2 = \frac{9}{5}\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+2 \\ &= \frac{9}{5}\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+2 = \frac{9}{5}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{9}{5}\cdot\frac{5^2}{6^2}+2 \\ &= \frac{9}{5}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{24}. \end{aligned}$$

終

問題 4.6.3 以下の変数 x の2次式を平方完成しなさい。

$$(1) \frac{5}{2}x^2-4x+3. \quad (2) -\frac{8}{3}x^2+2x+1.$$

一般的に、変数 x の2次式 ax^2+bx+c (a, b, c は定数で $a \neq 0$) の平方完成は次のようになります：

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left\{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \end{aligned}$$

このように、変数 x の任意の2次式は平方完成して

$$a(x+p)^2+q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0)$$

の形に直すことができます。この2次式の平方完成は重要で、以後しばしば用います。結果ではなく必ず変形する要領を憶えて下さい。