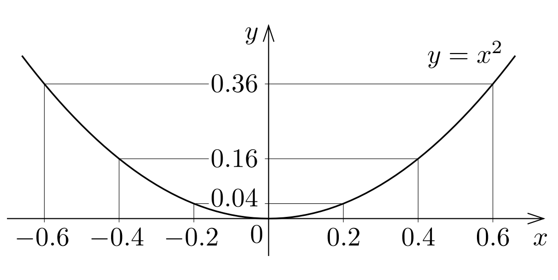
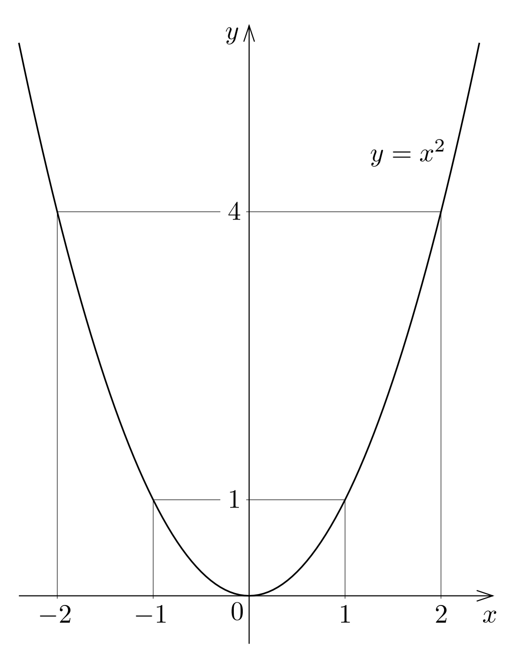
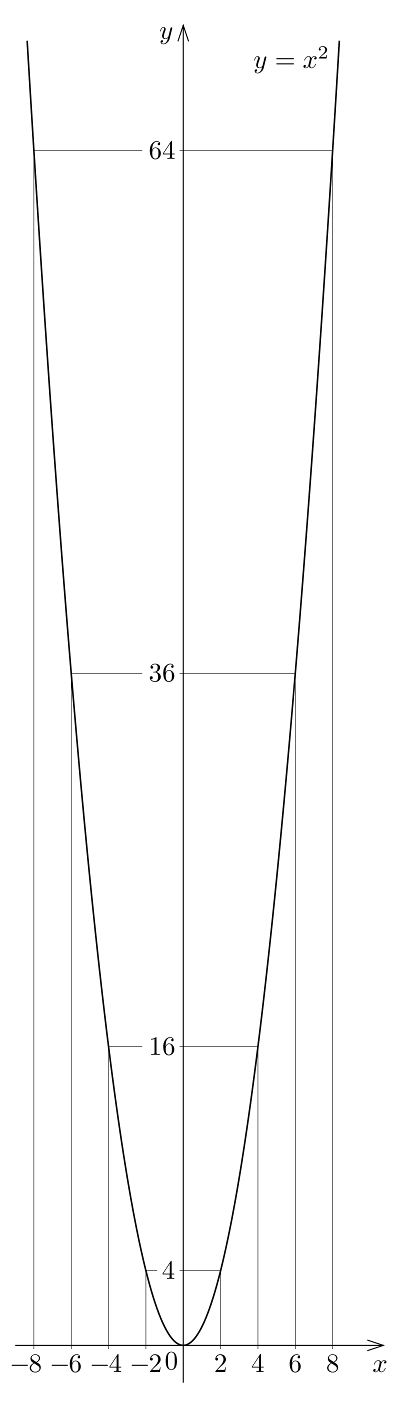
## §4.7 2次関数のグラフ

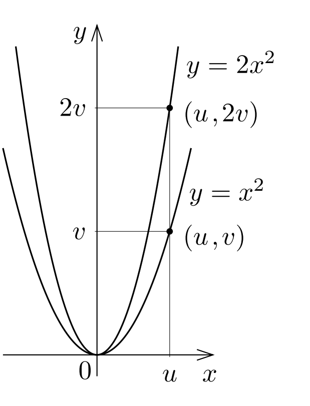
まず，尺度が異なる3つの $xy$ 座標平面において，変数 $x$ の2次関数 $y=x^2$ のグラフを描いてみます．



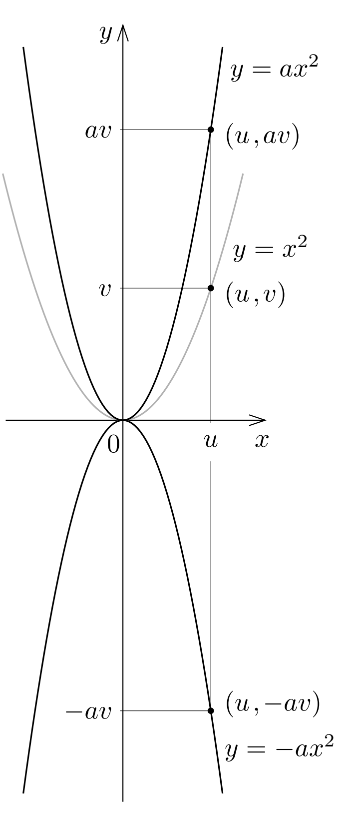

例解　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=2x^2$ のグラフを考えます． $y=x^2$ のグラフに属す点を $(u,v)$ とおきます． $u^2=v$ です． $y=2x^2$ のグラフに属す点の $x$ 座標が $u$ のとき，$y$ 座標は $2u^2=2v$ です；従ってその点は $(u,2v)$ です． つまり， $y=x^2$ のグラフに属す点 $(u,v)$ に対してその $y$ 座標だけを2倍した点 $(u,2v)$ が $y=2x^2$ のグラフに属します．



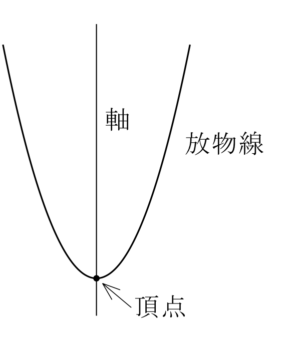

終

一般的にいうと次のことが成り立ちます：定数 $a$ に対し，変数 $x$ の関数 $y=ax^2$ のグラフは，$x$ の関数 $y=x^2$ のグラフに属す各点 $(u,v)$ に対してその $y$ 座標を $a$ 倍した点 $(u,av)$ の全体である．

定数 $a$ に対し，変数 $x$ の関数 $y=ax^2$ のグラフと関数 $y=-ax^2$ のグラフとを考えます．関数 $y=ax^2$ のグラフは，関数 $y=x^2$ のグラフに属す各点 $(u,v)$ の $y$ 座標だけを $a$ 倍した点 $(u,av)$ の全体です；また，関数 の $y=-ax^2$ のグラフは，関数 $y=x^2$ のグラフに属す各点 $(u,v)$ の $y$ 座標だけを $-a$ 倍した点 $(u,-av)$ の全体です． $y=-ax^2$ のグラフに属す点 $(u,-av)$ は $y=ax^2$ のグラフに属す点 $(u,av)$ と $x$ 軸に関して対称です． 従って，関数 $y=-ax^2$ のグラフは関数 $y=ax^2$ のグラフと $x$ 軸に関して対称です．




$xy$ 座標平面において方程式 $y=ax^2$ が表す図形を**放物線** (parabola) といいます． 各放物線には唯1本の対称軸があります． 各放物線の対称軸をその放物線の軸といいます． また，各放物線とその対称軸との共有点をその放物線の頂点といいます． $xy$ 座標平面において，変数 $x$ の2次関数 $y=ax^2$ のグラフの対称軸は $y$ 軸であり，頂点は原点 $(0,0)$ です．

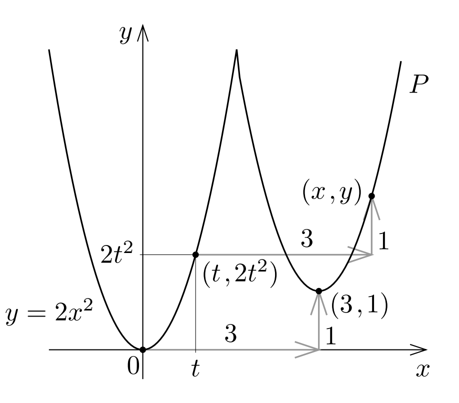


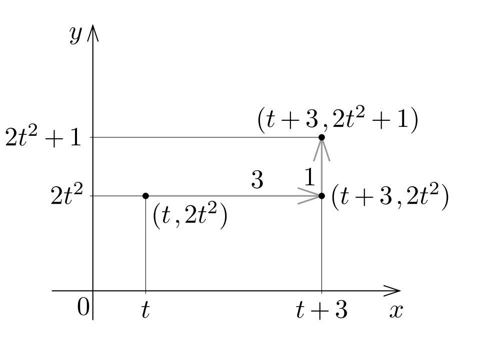

例解　$xy$ 座標平面において変数 $x$ の2次関数 $y=2x^2$ のグラフを $x$ の軸の向きに 3 だけ $y$ 座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線を $P$ とおきます（右図参照）． 関数 $y=2x^2$ のグラフの点は，$x$ 座標を $t$ とすると $y$ 座標は $2t^2$ ですから，$(t,2t^2)$ となります． $P$ の各点 $(x,y)$ は，元の関数 $y=2x^2$ のグラフのある点 $(t,2t^2)$ を $x$ の軸の向きに 3 だけ $y$ 座標の向きに 1 だけ移動させた点 $(t+3,2t^2+1)$ です；

$$(x,y)=(t+3,2t^2+1)\ .$$

よって

$$x=t+3\ ,\qquad y=2t^2+1\ .$$




等式 $x=t+3$ より $t=x-3$ ，これを等式 $y=2t^2+1$ に代入すると $y=2(x-3)^2+1$ ． つまり，2次関数 $y=2x^2$ のグラフを $x$ の軸の向きに 3 だけ $y$ 座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線 $P$ は関数 $y=2(x-3)^2+1$ のグラフです．

終

例題　$xy$ 座標平面において変数 $x$ の2次関数 $y=3x^2$ のグラフを $x$ 軸の向きに 2 だけ $y$ 軸の向きに $-5$ だけ平行移動させた放物線 $P$ をグラフとする関数を表す方程式を導く．

〔解説〕 放物線 $P$ の各点 $(x,y)$ は，2次関数 $y=3x^2$ のグラフの点 $(t,3t^2)$（$t$ はある実数）を $x$ の軸の向きに 2 だけ $y$ 軸の向きに $-5$ だけ平行移動させた点 $(t+2,3t^2-5)$ なので， $(x,y)=(t+2,3t^2-5)$ ． よって

$$x=t+2 \text{ かつ } y=3t^2-5\ .$$

$x=t+2$ より $t=x-2$ ；これを $y=3t^2-5$ に代入すると $y=3(x-2)^2-5$ ，右辺を降冪の順に整理すると $y=3x^2-12x+7$ ． 故に $P$ をグラフとする関数は $y=3x^2-12x+7$ である．

終

問題 4.7.1　$xy$ 座標平面において変数 $x$ の2次関数 $y=4x^2$ のグラフを $x$ の軸の向きに $-2$ だけ $y$ 軸の向きに $-3$ だけ平行移動させた放物線 $P$ をグラフとする関数を表わす方程式を導きなさい（導く過程を記しなさい）．

例題　$xy$ 座標平面において変数 $x$ の2次関数 $y=2x^2$ のグラフを頂点が $(-3,4)$ になるように平行移動させた放物線 $P$ をグラフとする関数を表す方程式を導く．

〔解説〕 関数 $y=2x^2$ のグラフの頂点 $(0,0)$ が点 $(-3,4)$ に移動する平行移動で，各点は $x$ の軸の向きに $-3$ だけ $y$ 軸の向きに 4 だけ平行移動する． 放物線 $P$ の各点 $(x,y)$ は，関数 $y=2x^2$ のグラフの点 $(t,2t^2)$（$t$ はある実数）を $x$ の軸の向きに $-3$ だけ $y$ 軸の向きに 4 だけ平行移動させた点 $(t-3,2t^2+4)$ なので，$(x,y)=(t-3,2t^2+4)$ ． よって

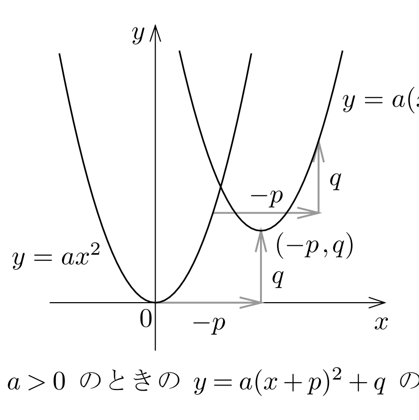
$$x=t-3 \text{ かつ } y=2t^2+4\ .$$

$x=t-3$ より $t=x+3$ ． これを $y=2t^2+4$ に代入すると， $y=2(x+3)^2+4$ ，右辺を降冪の順に整理すると $y=2x^2+12x+22$ ． 故に $P$ をグラフとする関数は $y=2x^2+12x+22$ である．

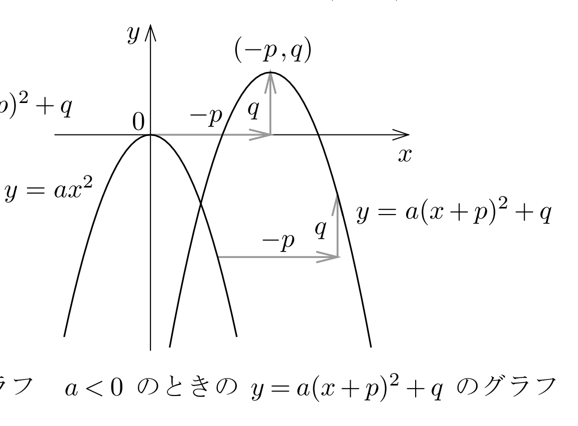
終

問題 4.7.2　$xy$ 座標平面において変数 $x$ の2次関数 $y=3x^2$ のグラフを頂点が $(4,2)$ になるように平行移動させた放物線 $P$ をグラフとする関数を表わす方程式を導きなさい（導く過程を記しなさい）．

一般的に述べます． 定数 $a,p,q$ （ $a\neq 0$ ）に対し，$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは，$x$ の関数 $y=ax^2$ のグラフを $x$ 軸の向きに $-p$ だけ $y$ 軸の向きに $q$ だけ平行移動させた図形です． 関数 $y=ax^2$ のグラフの頂点は原点 $(0,0)$ でした． 従って， $y=a(x+p)^2+q$ のグラフの頂点は，原点 $(0,0)$ を $x$ 軸の向きに $-p$ だけ $y$ 軸の向きに $q$ だけ平行移動させた点 $(-p,q)$ です．




$a>0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ




$a<0$ のときの $y=a(x+p)^2+q$ のグラフ

このように，関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは，関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり，頂点は $(-p,q)$ になります．

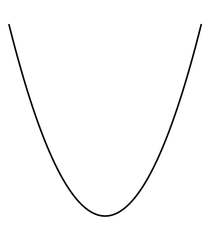
> **定理 4.7**　定数 $a,p,q$ （ $a\neq 0$ ）に対し，$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは，関数 $y=ax^2$ のグラフを，頂点が $(-p,q)$ になるように平行移動させた放物線である．

変数 $x$ の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ （ $a,b,c$ は定数で $a\neq 0$ ） を $x$ について平方完成された式で表すと $y=a(x+p)+q$ （ $p,q$ は定数） となります． $xy$ 座標平面において， $y=a(x+p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線ですから，結局，

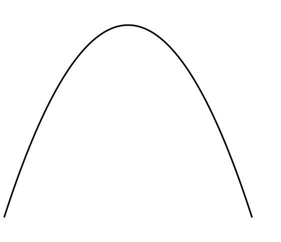
　　$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線

です． 故に， $y=ax^2+bx+c$ のグラフの形と向きとは $a$ の値だけで決まります．

定数 $a$ について $a>0$ のとき，変数 $x$ の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは上に開いた形の放物線になります：この放物線の状態を下に凸といいます． また，定数 $a$ について $a<0$ のとき，変数 $x$ の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは下に開いた形の放物線になります：この放物線の状態を上に凸といいます．



下に凸の放物線



上に凸の放物線

座標平面において関数のグラフを描くときは，できるだけそのグラフと座標軸の共有点の座標を求めて下さい．

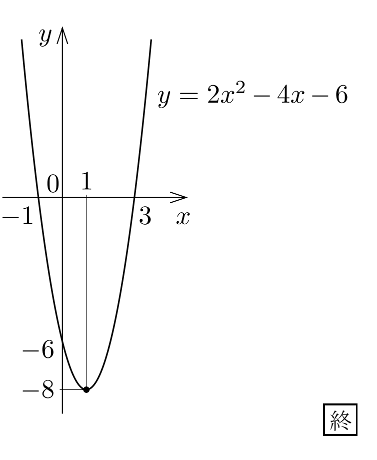
例題　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=2x^2-4x-6$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く．

〔解説〕 2次関数 $y=2x^2-4x-6$ を $x$ について平方完成された式で表す：

$$\begin{aligned}y&=2x^2-4x-6=2(x^2-2x)-6\\&=2(x^2-2x+1-1)-6=2(x-1)^2-2-6\\&=2(x-1)^2-8\ .\end{aligned}$$

従って関数 $y=2x^2-4x-6$ のグラフの頂点は $(1,-8)$ である．

$y=2x^2-4x-6$ より， $y=0$ とすると， $2x^2-4x-6=0$ ， $x^2-2x-3=0$ ，$(x+1)(x-3)=0$ ， よって $x=-1,3$ ． 従って $y=2x^2-4x-6$ のグラフと $x$ 軸との共有点は $(-1,0)$ と $(3,0)$ ． また， $x=0$ のとき $y=-6$ なので， $y=2x^2-4x-6$ のグラフと $y$ 軸との共有点は $(0,-6)$ である．




終

問題 4.7.3　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=2x^2-8x+\dfrac{7}{2}$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描きなさい．

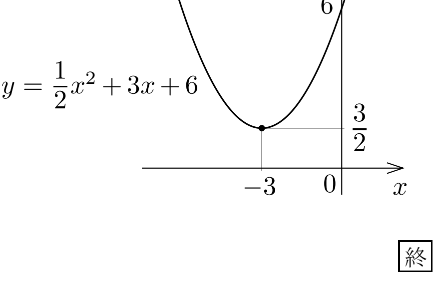
例題　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+6$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く．

〔解説〕 2次関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+6$ を $x$ について平方完成された式で表す：

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2}x^2+3x+6=\frac{1}{2}(x^2+6x)+6=\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9)+6=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}+6\\&=\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{3}{2}\ .\end{aligned}$$

従って関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+6$ のグラフの頂点は $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$ である．

$y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+6$ より， $y=0$ のとき $\dfrac{1}{2}x^2+3x+6=0$ ；この方程式の判別式の値は $3^2-4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 6<0$ なので，この方程式は解が虚数である，つまり実数の解が無い． 従って $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+6$ のグラフと $x$ 軸との共有点は無い． また， $x=0$ のとき $y=6$ なので， $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+6$ のグラフと $y$ 軸との共有点は $(0,6)$ である．




終

問題 4.7.4　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=\dfrac{2}{3}x^2+4x+7$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描きなさい．

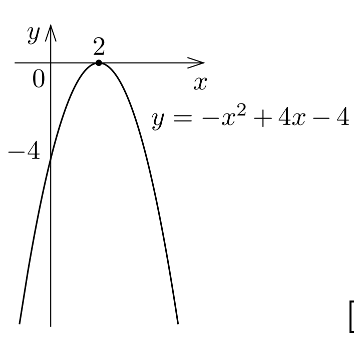
例題　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=-x^2+4x-4$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く．

〔解説〕 2次関数 $y=-x^2+4x-4$ を $x$ について平方完成された式で表す：

$$\begin{aligned}y&=-x^2+4x-4=-(x^2-4x)-4=-(x^2-4x+4-4)-4=-(x-2)^2+4-4\\&=-(x-2)^2\ .\end{aligned}$$

従って関数 $y=-x^2+4x-4$ のグラフの頂点は $(2,0)$ である．

$y=-x^2+4x-4$ より， $y=0$ のとき， $-x^2+4x-4=0$ ， $x^2-4x+4=0$ ，$(x-2)^2=0$ ， よって $x=2$ ． 従って $y=-x^2+4x-4$ のグラフと $x$ 軸との共有点は $(2,0)$ ． また， $x=0$ のとき $y=4$ なので， $y=-x^2+4x-4$ のグラフと $y$ 軸との共有点は $(0,-4)$ ．




終

問題 4.7.5　$xy$ 座標平面において，変数 $x$ の関数 $y=-2x^2+6x-\dfrac{9}{2}$ のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描きなさい．

定理 4.7 より次のことが成り立ちます：定数 $a,p,q$（ $a\neq 0$ ） に対して，$xy$ 座標平面において，関数 $y=ax^2$ のグラフを点 $(p,q)$ が頂点となるように平行移動させた放物線は，関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフである．

例題　変数 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ について，$xy$ 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=3x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり，その頂点は $(2,4)$ であるとする． $f(x)$ の値を表す $x$ の2次式を求める（降冪の順に整理する）．

〔解説〕 2次関数 $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=3x^2$ のグラフを平行移動させた放物線で，その頂点が $(2,4)$ なので， $f(x)=3(x-2)^2+4$ ；右辺を降冪の順に整理すると $f(x)=3x^2-12x+16$ ．

終

問題 4.7.6　変数 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ について，$xy$ 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり，その頂点は $(-4,3)$ であるとします． $f(x)$ の値を表す $x$ の2次式を求めなさい（降冪の順に整理しなさい）．

例題　変数 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ について，$xy$ 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは点 $(2,-5)$ を頂点とする放物線であり，点 $(6,7)$ が $y=f(x)$ のグラフに属すとする． $f(x)$ の値を表す $x$ の2次式を求める（降冪の順に整理する）．

〔解説〕 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ のグラフは点 $(2,-5)$ を頂点とする放物線なので，ある定数 $a$ をとると $y=a(x-2)^2-5$ ． 点 $(6,7)$ が関数 $f(x)=a(x-2)^2-5$ のグラフに属すので， $7=a(6-2)^2-5$ ， $16a=12$ ， $a=\dfrac{3}{4}$ ． よって $f(x)=\dfrac{3}{4}(x-2)^2-5=\dfrac{3}{4}x-3x-1$ ．

終

問題 4.7.7　変数 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ について，$xy$ 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは点 $(6,-11)$ を頂点とする放物線であり，点 $(3,-5)$ が $y=f(x)$ のグラフに属すとします． $f(x)$ の値を表す $x$ の2次式を求めなさい（降冪の順に整理しなさい）．

定数 $a,b,c$（ $a\neq 0$ ） に対して， $xy$ 座標平面において変数 $x$ の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線でした．

例題　変数 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ について，$xy$ 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=4x^2$ のグラフを平行移動させた放物線であり，点 $(2,-5)$ と $(3,6)$ とが $y=f(x)$ のグラフに属すとする． $f(x)$ の値を表す $x$ の2次式を求める（降冪の順に整理する）．

〔解説〕 $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=4x^2$ のグラフを平行移動させた放物線なので，ある定数 $b,c$ をとると $f(x)=4x^2+bx+c$ ． 点 $(2,-5)$ が関数 $y=4x^2+bx+c$ のグラフに属すので， $-5=4\cdot 2^2+b\cdot 2+c$ よって $2b+c=-21$ ． 点 $(3,6)$ が関数 $y=4x^2+bx+c$ のグラフに属すので， $6=4\cdot 3^2+b\cdot 3+c$ よって $3b+c=-30$ ． これらの方程式より， $b=-9$ かつ $c=-3$ ． $f(x)=4x^2+bx+c$ なので，$f(x)=4x^2-9x-3$ ．

終

問題 4.7.8　変数 $x$ の2次関数 $y=f(x)$ について，$xy$ 座標平面において $y=f(x)$ のグラフは関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ のグラフを平行移動させた放物線で，点 $(4,1)$ と $(6,8)$ とが $y=f(x)$ のグラフに属すとします． $f(x)$ の値を表す $x$ の2次式を求めなさい（降冪の順に整理しなさい）．